

На правах рукописи

ЮГ-2

Чесноков Юрий Георгиевич

Гидромеханические модели в химико-технологических процессах

05.17.08 – Процессы и аппараты химических технологий

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени доктора  
физико – математических наук

Иваново-2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)»


Научный консультант	доктор технических наук, профессор <b>Флисюк Олег Михайлович</b>
Официальные оппоненты	<b>Вязьмин Андрей Валентинович</b> , доктор физико-математических наук, доцент федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет», кафедра процессов и аппаратов химических технологий им. Н.И. Гельперина, заведующий кафедрой  <b>Лагуткин Михаил Георгиевич</b> , доктор технических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский политехнический университет», кафедра «Аппаратурное оформление и автоматизация технологических производств», профессор  <b>Рыдалевская Мария Александровна</b> , доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет», кафедра гидроаэромеханики, профессор
Ведущая организация	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет»

Защита состоится «06» декабря 2021 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета 24.2.302.02 на базе ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет» по адресу: 153000, г. Иваново, пр. Шереметевский, 7, ауд. Г-205

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет» по адресу: 153000, г. Иваново, пр. Шереметевский, 10 и на сайте <https://www.isuct.ru> по ссылке [https://www.isuct.ru/sites/default/files/department/ighu/dissertacionnye-sovety/files/chesnokov\\_yuriy\\_georgievich-02062021/chesnokov\\_yug\\_dissertaciya.pdf](https://www.isuct.ru/sites/default/files/department/ighu/dissertacionnye-sovety/files/chesnokov_yuriy_georgievich-02062021/chesnokov_yug_dissertaciya.pdf)

Автореферат разослан «    » \_\_\_\_\_ 2021 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Зуева Галина Альбертовна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Протекание многих типовых химико-технологических процессов в значительной мере определяется закономерностями движения жидкостей и газов, а также многофазных систем, состоящих из двух или большего числа фаз. Это относится не только к гидромеханическим процессам, где гидромеханические закономерности играют определяющую роль, но также и к типовым тепло- и массообменным процессам. По этой причине при разработке методов расчета аппаратов, предназначенных для осуществления этих процессов, важную роль играет теоретическое исследование гидродинамики этих аппаратов, опирающееся на экспериментальные исследования.

К числу наиболее важных гидромеханических проблем, возникающих при анализе химико-технологических процессов, относится задача о ламинарном и турбулентном течении жидкостей в трубах и каналах различной формы. Как известно, задача о ламинарном течении жидкости по трубе кругового поперечного сечения решена еще Стоксом. Тем не менее, до настоящего времени и в этой области остаются актуальные нерешенные проблемы, важные при анализе мембранных процессов разделения. Эти задачи рассматриваются в диссертационной работе.

При турбулентном режиме течения жидкостей и газов в трубах и каналах в результате интенсивного турбулентного перемешивания тепло- и массообменные процессы протекают с наиболее высокой скоростью. До настоящего времени не удается разработать строгую теорию турбулентности, которая могла бы служить надежной основой расчета процессов переноса. В последние несколько десятилетий быстрое развитие вычислительной техники сделало возможным использовать в качестве инструмента изучения турбулентных течений метод прямого численного моделирования. При помощи этого метода можно определять такие статистические характеристики турбулентных течений, которые очень сложно или даже невозможно измерить. Изучение при помощи результатов подобных расчетов влияния числа Рейнольдса на наиболее важные характеристики турбулентных течений (кинетическая энергия турбулентных пульсаций, диссипация механической энергии, напряжения Рейнольдса и др.) является актуальной задачей.

Актуальной является и разработка физически обоснованных математических моделей сложных турбулентных течений. В данной диссертационной работе рассматриваются модели течений в гидроциклоне, а также модель барботажного перемешивания.

К числу актуальных гидромеханических проблем, важных при разработке методов расчета типовых химико-технологических процессов относится задача о диспергировании жидкости на капли. Известно много различных механизмов диспергирования, применяемых в различных ситуациях. В данной работе рассматривается задача о диспергировании струи жидкости на капли в результате неустойчивости по отношению к силам поверхностного натяжения.

**Степень научной разработанности темы исследования.** Изучению различных гидромеханических проблем, возникающих при анализе типовых процессов химической технологии, посвящены многочисленные работы как отечественных, так и зарубежных ученых. Это относится и к тому кругу задач, который рассматривается в данной диссертационной работе. Однако постоянное развитие техники приводит к возникновению новых, еще не изученных в должной мере проблем. К числу таких задач, относится, в частности, разработка теории течений в тонких каналах с проницаемыми стенками при наличии проскальзывания на стенках. Данная проблема актуальна при разработке методов расчета процессов тепло- и массообмена, протекающих в аппаратах с тонкими каналами. Первые работы в области теории течений в каналах с проницаемыми стенками (Berman

A.S., Yuan S.W., Terrill R.M.) основывались на предположении о постоянстве скорости протекания жидкости через стенку. Такой обход был распространен и на случай, когда на стенках канала имеется проскальзывание (Singh R., Laurence R.L.). Здесь рассматривается ситуация, когда скорость протекания переменна вдоль поверхности канала. Не изученным в должной мере является и изменение характеристик пульсационного течения жидкости в канале с проницаемыми стенками.

Задача о теплообмене ламинарного потока жидкости со стенками трубы или канала является классической. Она впервые рассмотрена Грэтцом (Graetz L.) более ста лет назад. Это решение представляется в виде ряда, скорость сходимости которого является очень низкой на начальном участке, где вблизи стенки формируется температурный пограничный слой. Впоследствии были разработаны асимптотические методы (Lévêque M.A., Worsöe-Schmidt P.T., Newmen J.), позволяющие описывать процесс теплообмена на начальном участке. Эти решения получены для случаев, когда на стенках задана либо постоянная температура, либо постоянный тепловой поток. В данной диссертации рассматривается более общая ситуация, когда температура стенки изменяется по степенному закону.

Быстрое развитие вычислительной техники в течение последних нескольких десятилетий привело к тому, что появился новый метод исследования турбулентных течений – так называемый метод прямого численного моделирования. Первые работы по прямому численному моделированию турбулентных течений в плоском канале появились в конце 80-х годов прошлого века (Kim J., Moin P., Moser R.D., Kasagi N., Kawamura H.). В то время была возможность производить такое моделирование лишь при малых значениях критерия Рейнольдса. К настоящему моменту диапазон значений критерия Рейнольдса, очень существенно расширился (Himenez J., Orlandi P., Yamamoto Y.). Опубликованные различными авторами данные моделирования позволяют изучать влияние числа Рейнольдса на такие важнейшие статистические характеристики турбулентных течений, как поле осредненной скорости, напряжения Рейнольдса, кинетическая энергия турбулентных пульсаций, диссипация энергии и др.

Накопленная к настоящему времени информация, относящаяся к расчету гидроциклонов, обобщена во многих монографиях. Одной из последних является известная монография Терновского и Кутепова. Инженерные методы расчета гидроциклонов основываются в значительной мере на эмпирических и полуэмпирических соотношениях и изучение гидродинамики гидроциклонов, основанное на построении решений уравнений гидромеханики, представляет значительный интерес.

Исследования закономерностей диспергирования жидкости на капли, является весьма важной задачей при разработке методов расчета химико-технологических процессов, связанных с необходимостью диспергирования жидкостей. Эта проблема изучалась в течении длительного времени многими исследователями, начиная с Рэлея (Rayleigh J.W.S., Yuen M.-C., Nayfeh A.H., Eggers J., Шкадов В.Я.), однако до настоящего времени остаются нерешенными многие актуальные проблемы. Отметим, в частности, проблему капиллярного дробления струи, подверженной одноосному растяжению, а также влияние вязкости жидкости на нелинейное развитие капиллярных волн.

**Цель диссертационного исследования** – изучить гидродинамику ряда типовых химико-технологических процессов на основе аналитического решения уравнений гидромеханики, а также на основе использования экспериментальных данных и результатов, полученных различными авторами, при помощи метода прямого численного моделирования турбулентных течений.

Для реализации этой цели сформулированы и решены следующие научные задачи:

1. Разработать приближенный аналитический метод, позволяющий решить задачу о ламинарном движении жидкостей в трубах и каналах с проницаемыми стенками при сравнительно малых значениях скорости протекания жидкости через стенки канала при

- наличии проскальзывания жидкости на стенках. Получить на этой основе расчетные соотношения для определения гидравлического сопротивления труб с проницаемыми стенками и расхода жидкости через стенки трубы. На основе разработанной методологии описания ламинарного движения жидкости в трубах и каналах с проницаемыми стенками решить задачу о движении жидкости при изменении расхода жидкости на входе в трубу по периодическому закону.
2. Построить аналитическое решение задачи о теплоотдаче в трубе при ламинарном режиме течения при заданном тепловом потоке на стенке и проскальзывании жидкости на стенке, справедливое на больших расстояниях от входа в трубу. Построить расчетную формулу для определения критерия Нуссельта. Построить приближенную формулу для расчета критерия Нуссельта, справедливую при заданной температуре стенки. Построить решение задачи о теплообмене между потоком жидкости и стенкой, справедливое вблизи входа в трубу при изменении температуры стенки по степенному закону.
  3. Для плоского канала и трубы кругового поперечного сечения разработать формулы для расчета коэффициента трения при условии, что стенки канала являются гидравлически гладкими. На основе анализа данных прямого численного моделирования изучить возможные отклонения от фундаментальных законов стенки и дефекта скорости. Построить расчетные формулы для вычисления дефекта скорости, осевой скорости жидкости и ряда интегральных характеристик поля скорости.
  4. Изучить на основе данных прямого численного моделирования возможные отклонения от закона стенки для температуры и закона дефекта температуры.
  5. Изучить закономерности изменения по сечению канала пульсационной составляющей вихря скорости в зависимости от величины критерия Рейнольдса. Изучить закономерности изменения по сечению канала кинетической энергии пульсационного движения.
  6. Построить автомодельное решение задачи о движении жидкости в гидроциклоне. На этой основе разработать методологию расчета процесса классификации суспензии в гидроциклоне.
  7. Разработать математическую модель барботажного перемешивания жидкости в кольцевой емкости. Сопоставить результаты расчетов по модели с экспериментальными данными.
  8. Разработать приближенную аналитическую теорию, позволяющую рассчитать форму струи жидкости, вытекающей через сопло, на небольших расстояниях от него.
  9. Построить приближенные одномерные уравнения динамики струи. Разработать линейную теорию устойчивости струи, подверженной одноосному растяжению, а также решить задачу о нелинейном взаимодействии возмущений. Получить асимптотические формулы для длинноволновых возмущений и коротковолновых возмущений.
  10. На основе разработанных приближенных одномерных уравнений динамики струи сформулировать и решить задачу о нелинейном развитии возмущений в струе вязкой жидкости.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

- Аналитическое решение задачи о движении жидкости в трубе с проницаемыми стенками при наличии проскальзывания жидкости на стенках трубы. Аналитическое решение задачи о ламинарном движении жидкости в трубе с проницаемыми стенками при изменении расхода жидкости, поступающей в трубу по периодическому закону.
- Построение асимптотических формул для расчета критерия Нуссельта для случая, когда процесс теплообмена принимает установившийся характер и имеется проскальзывание жидкости на стенках. Построение асимптотических формул для расчета критерия

Нуссельта, справедливых вблизи от входа в трубу, при изменении температуры стенки по степенному закону.

- Построение формул для расчета коэффициента трения в плоском канале и трубе кругового поперечного сечения с гладкими стенками. Построение формул, описывающих влияние числа Рейнольдса на напряжения Рейнольдса и на дефект скорости.
- Построение формул, описывающих влияние числа Рейнольдса на статистические характеристики процесса переноса теплоты в плоском канале.
- Исследование влияния числа Рейнольдса на закономерности распределения пульсационной составляющей вихря скорости по сечению плоского канала. Исследование влияния числа Рейнольдса на закономерности распределения кинетической энергии турбулентных пульсаций по сечению плоского канала.
- Методика расчета процесса классификации суспензии в гидроциклоне.
- Методика описания процесса барботажного перемешивания в аппарате кольцевого поперечного сечения.
- Аналитическое решение задачи о движении струи жидкости в окрестности сопла.
- Вывод приближенных одномерных уравнений динамики струи жидкости. Аналитическое решение задачи о линейном развитии возмущений на поверхности струи, подверженной одноосному растяжению. Разработка приближенной нелинейной теории развития возмущений и асимптотических формул, справедливых для длинноволновых и коротковолновых возмущений.
- Аналитическое решение задачи о нелинейном развитии возмущений на поверхности струи вязкой жидкости.

**Достоверность полученных результатов и выводов** основывается на использовании фундаментальных уравнений гидромеханики, обоснованность которых не вызывает никаких сомнений, применении обоснованных методов построения приближенных аналитических решений уравнений, в частности асимптотических методов, согласованием полученных аналитических результатов с известными из литературы экспериментальными данными и данными, полученными путем прямого численного моделирования турбулентных течений.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в следующем:

1. Построено приближенное аналитическое решение уравнений гидромеханики, описывающее движение жидкости в канале с проницаемыми стенками при наличии проскальзывания на стенках, которое в отличие от известных решений не предполагает постоянства скорости протекания жидкости через стенку. В частности, изучено изменение распределения проекций скорости и давления по длине канала в том случае, когда протекание жидкости через стенку описывается законом Дарси.
2. Изучено движение жидкости в канале с проницаемыми стенками при изменении расхода жидкости на входе в трубу по периодическому закону. Полученные решения позволяют рассчитать изменение характеристик пульсационного движения по длине канала.
3. Получены аналитические выражения для расчета критерия Нуссельта в трубах и каналах на установившемся участке при ламинарном режиме движения и наличии проскальзывания на стенках. Скачек температуры на стенке предполагается отсутствующим. Важность построения этих решений связана с тем, что в трубах и каналах малого размера экспериментальное исследование локальных характеристик практически невозможно и определению могут подлежать только интегральные характеристики.
4. Решена задача о теплообмене жидкости со стенками на начальном участке труб и каналов при изменении температуры стенки по степенному закону. Это решение обобщает ранее полученные в этой области результаты.

5. В данной диссертационной работе решается новая научная проблема анализа и сопоставления результатов прямого численного моделирования турбулентных течений, полученных различными авторами и выявления на этой основе влияния числа Рейнольдса на статистические характеристики турбулентных течений. Построены формулы для расчета коэффициента трения в трубах и каналах с гидравлически гладкими стенками, справедливые в широком диапазоне изменения критерия Рейнольдса, средней по сечению канала скорости, дефекта средней скорости и других интегральных характеристик течения.
6. Изучены отклонения от классических законов подобия: закона стенки и закона дефекта скорости. Показано, что непосредственно в окрестности стенки в так называемом вязком подслое имеется зависимость напряжений Рейнольдса и других статистических характеристик от величины критерия Рейнольдса. Такого рода результаты получены и для поля температуры.
7. При помощи результатов прямого численного моделирования изучено влияние числа Рейнольдса на распределение кинетической энергии турбулентных пульсаций по сечению канала и на распределение пульсаций завихренности. Эти результаты могут найти применение для проверки полуэмпирических моделей турбулентности. Многие из них включают в свой состав модельные уравнения для кинетической энергии турбулентных пульсаций и скорости диссипации энергии. Последняя величина в безразмерных переменных почти не отличается от квадрата модуля вектора пульсационной составляющей вихря скорости.
8. В диссертации предложена новая модель для расчета поля скорости жидкости в гидроциклоне, основанная на использовании уравнений гидромеханики, упрощенных применительно к специфическим условиям движения жидкости в гидроциклоне. Применение этой модели открывает возможность разработки методики расчета процессов, протекающих в гидроциклонах, например, процесса классификации суспензий. Сравнительно простая методика расчета процесса классификации суспензии рассмотрена в диссертации.
9. На основе экспериментальных исследований процесса барботажного перемешивания жидкости в аппарате кольцевого поперечного сечения предложена новая математическая модель этого процесса.
10. Впервые предложена приближенная теоретическая модель, описывающая форму струи жидкости в окрестности сопла при наличии затекания жидкости за кромку сопла.
11. Построены приближенные одномерные уравнения динамики струи жидкости, отличающиеся от известных сохранением большего числа членов в разложении по малому параметру – отношению радиуса струи к длине волны возмущения.
12. В линейном и нелинейном приближениях изучено развитие капиллярных волн на поверхности растягивающейся струи жидкости. Построена длинноволновая и коротковолновая асимптотики решения.
13. На основе приближенных одномерных уравнений изучено нелинейное развитие возмущений на поверхности струи вязкой жидкости. Исследовано влияние вязкости на образование капель сателлитов.

**Теоретическая значимость.** Полученные в диссертационной работе решения задач гидродинамики, возникающих при разработке методов расчета типовых процессов химической технологии вносят существенный вклад в развитие теории этих процессов.

**Практическая значимость.** Практическая значимость результатов работы определяется тем, что все полученные в ней решения и выводы служат для разработки методов расчета химико-технологических процессов, широко используемых на практике. Разработанная в диссертации методика расчета процесса классификации суспензии в гидроциклоне по крупности нашла применение для создания промышленной группы

гидроциклонов, в которых классифицируется высокодисперсная суспензия хемосорбционного комплекса окислов разновалентного марганца (ООО «Диома», С.-Петербург). В ООО «Интехпроект» (С.-Петербург) использована разработанная в диссертации математическая модель барботажного перемешивания в кольцевых зазорах. Методика расчета коэффициентов теплоотдачи, предложенная в диссертации, использована при расчете и проектировании микротеплообменника (ООО «Альтернативная Энергетика РО», С.-Петербург. Ряд результатов исследования турбулентных течений в трубах и каналах используется при преподавании дисциплины «Процессы и аппараты» в СПбГТИ(ТУ), С.-Петербург. Реализация результатов работы подтверждена четырьмя справками об использовании результатов работы.

**Научные публикации.** Основные результаты работы отражены в 40 статьях и материалах конференций, из них 28 статей в журналах, индексируемых в Web of Science.

**Апробация результатов работы.** Отдельные результаты работы докладывались на XI международной конференции «Алюминий Сибири» (Красноярск, 2005 г.), XVI международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (ММТТ-16, С.-Петербург, 2003), научной конференции, посвященной 186-й годовщине образования СПбГТИ(ТУ) (С.-Петербург, 2014), XXIV международной научно-практической конференции «Приоритетные направления развития науки и технологий» (Тула, 2018), XVI научно-практической конференции «Экспериментальные и теоретические исследования в современной науке: проблемы, пути решения» (Ростов-на-Дону, 2018), международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы естественных и математических наук в современных условиях развития страны» (С.-Петербург, 2019), международном научно-техническом симпозиуме «Вторые международные Косыгинские чтения: «Энергоресурсоэффективные экологически безопасные технологии и оборудование», приуроченные к 100-летию РГУ имени А.Н. Косыгина» (Москва, 2019).

**Личный вклад автора** заключается в постановке целей и задач исследования, решении поставленных задач и формулировке выводов, вытекающих из полученных решений, обработке экспериментальных данных и обсуждении результатов экспериментов. Большая часть задач, обсуждаемых в тексте диссертации, решена лично автором.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа изложена на 383 страницах основного текста и состоит из введения, пяти глав и заключения. Работа содержит 143 рисунка и 3 таблицы. Список литературы включает 358 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель и задачи, рассматриваемые в диссертации, охарактеризована научная новизна работы, ее теоретическая и практическая значимость, изложено краткое содержание диссертации.

**В первой главе** рассматриваются закономерности течения, переноса теплоты и вещества в тонких каналах, для которых характерен ламинарный режим течения. К аппаратам этого типа относятся аппараты для осуществления мембранных методов разделения, например, аппараты с полыми волокнами или плоскими каналами. Основной особенностью течений в этом случае является то обстоятельство, что стенки канала являются проницаемыми для жидкости или газа. Как хорошо известно, проницаемость стенок оказывает существенное влияние на закономерности переноса вещества в тонких



каналах. Возникает так называемая концентрационная поляризация и другие явления. Ламинарный режим течения наблюдается также в миниатюрных теплообменниках, которые находят применение в последние годы. В аппаратах этого типа, несмотря на ламинарный режим течения, коэффициенты теплоотдачи весьма велики благодаря малому диаметру каналов.

Следует отметить, что изучение гидродинамики течений в трубах с проницаемыми стенками представляет интерес не только с точки зрения расчета гидравлического сопротивления аппаратов, но и, главным образом, для разработки теории тепло- и массообменных процессов, протекающих в таких аппаратах. Расчет поля скорости жидкости совершенно необходим для разработки такой теории.

Течение в трубах и каналах с проницаемыми стенками рассматривалось многими авторами. Еще в 50-х годах прошлого века Берманом было показано, что в том случае, если на стенках плоского канала с параллельными стенками скорость протекания жидкости через стенку постоянна по длине канала, уравнения движения жидкости допускают автомодельное решение. Задача в этом случае сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Обозначим через  $v_w$  постоянную по длине канала скорость протекания жидкости через стенки, а через  $Re_w = \rho v_w h / \mu$  критерий Рейнольдса, определенный по скорости протекания через стенки и полуширине канала  $h$ . Здесь  $\rho$  и  $\mu$  – плотность и вязкость жидкости (газа) соответственно. Берман построил приближенное решение полученного им обыкновенного дифференциального уравнения при малых значениях этого параметра. В дальнейшем эта теория была распространена на другие типы течений, на течения, для которых параметр  $Re_w$  не является малым. В той ситуации, когда давление существенно изменяется по длине канала, а скорость протекания жидкости через стенку канала определяется перепадом давлений по разные стороны стенки, скорость протекания через стенку не будет постоянной даже при однородной пористости стенок. Поэтому теория, которая основана на допущении о постоянстве этой величины, становится неприменимой. Следует однако, иметь в виду, что для мембранных процессов разделения характерны очень малые значения параметра  $Re_w$ . Для процессов обратного осмоса это величина порядка  $10^{-3}$ , для процессов ультра- и микрофльтрации порядка  $10^{-2} - 10^{-1}$ . Это позволяет построить приближенную теорию, не предполагая постоянство протекания жидкости через стенку. Решение можно построить в виде рядов по степеням малого параметра, представляющего собой отношение характерных значений нормальной к стенке и продольной составляющих скорости. Такого рода решения рассматриваются в первой главе.

На твердой поверхности обычно выставляется условие прилипания жидкости к поверхности. Это означает, что продольная составляющая скорости жидкости на стенке обращается в нуль. В ряде случаев это условие должно быть заменено на условие проскальзывания. Во-первых, при движении жидкости вдоль пористой поверхности касательная к поверхности составляющая скорости на стенке пропорциональна производной от этой величины по нормали к стенке и корню квадратному из коэффициента проницаемости, фигурирующего в уравнении Дарси, описывающем движение жидкости в пористой среде. Это так называемое условие Биверса – Джозефа. Во-вторых, проскальзывание может оказаться существенным при движении жидкости в каналах малого размера вдоль гидрофобной поверхности. При движении газов в тонких каналах скорость проскальзывания зависит от числа Кнудсена и может влиять на движение, если число Кнудсена не является очень малым. В данной главе задача о движении жидкости в трубе с проницаемыми стенками решается при наличии проскальзывания жидкости на стенках. Будем обозначать через  $u$  продольную составляющие вектора скорости. Тогда условие проскальзывания можно сформулировать так:

$$u_w = -b \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

Здесь  $u_w$  – продольная составляющая скорости жидкости на стенке,  $r$  – радиальная координата,  $R$  – радиус трубы,  $b$  – так называемая длина проскальзывания. Как уже говорилось выше, во многих случаях можно считать, что скорость протекания жидкости через стенку трубы мала по сравнению со средней по сечению скоростью жидкости на входе в трубу. Если перейти в уравнениях, описывающих течение жидкости по трубе (уравнение неразрывности и уравнение Навье-Стокса) к безразмерным переменным, используя различные масштабы для продольной и нормальной к стенке составляющих скорости, в уравнении движения появится малый параметр – число Рейнольдса, определенное по характерному значению скорости жидкости на стенке. Решение можно строить в виде разложений по степеням малого параметра.

Уравнения для коэффициентов разложений можно получить, если подставить эти разложения в уравнения гидромеханики и приравнять коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях  $Re_w$ . В данном разделе построены два первых приближения.

Скорость протекания через стенку может быть найдена, если движение через стенку трубы описывается законом Дарси, причем давление снаружи трубы можно считать постоянным. В этом случае получаются явные аналитические выражения для расчета зависимостей указанных величин от осевой координаты. Запишем закон Дарси следующим образом:

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Здесь  $k$  – коэффициент проницаемости пористых стенок трубы. Тогда построенные решения будут содержать три безразмерных параметра  $\delta$ ,  $\lambda$  и  $\xi$ , которые определяются при помощи формул:

$$\delta = \frac{b}{R}, \lambda^2 = \frac{16(k/R^2)}{(1+4\delta)(R/L)^2 \ln(R_c/R)}, \xi = \frac{(p_0 - p_c)L}{2R^2} \sqrt{\frac{k(1+4\delta)}{\ln(R_c/R)}}.$$

Здесь  $R_c$  – наружный диаметр трубы,  $L$  – длина трубы,  $p_0$  – давление жидкости на входе в трубу,  $p_c$  – давление жидкости снаружи трубы. Последняя величина предполагается постоянной. В первом приближении по малому параметру  $Re_w$  получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= \frac{2}{1+4\delta} [ch(\lambda z) - \xi sh(\lambda z)](1 + 2\delta - r^2), \\ v^{(0)} &= \frac{\lambda}{1+4\delta} [\xi ch(\lambda z) - sh(\lambda z)]r[2(1 + 2\delta) - r^2], \\ p^{(0)} - p_c &= \frac{8}{\lambda(1+4\delta)} [\xi ch(\lambda z) - sh(\lambda z)]. \end{aligned}$$

Полученные результаты можно использовать для расчетов аппаратов с полыми волокнами, предназначенными для осуществления мембранных процессов разделения. В таких аппаратах давление жидкости внутри мембранных волокон должно быть выше, чем давление в пространстве между волокнами, если разделяемый поток поступает внутрь волокон. Насколько сильно должны различаться давление внутри и вне волокон зависит в первую очередь от типа процесса, а также от вида мембраны. Наиболее сильно давление внутри и вне волокон различаются при проведении процессов обратного осмоса.

Построенное решение показывает, что при условии  $\xi \geq 1$  давление жидкости внутри трубы больше, чем давление жидкости снаружи трубы, при любых значениях параметра  $\lambda$ . Если же  $\xi < 1$ , то давление внутри волокна будет выше, чем снаружи только при том условии, что параметр  $\lambda$ , которому пропорциональна безразмерная длина трубы, будет меньше максимального значения, определяемого по формуле:

$$\lambda_{max} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

С другой стороны, при  $\xi > 1$  жидкость будет иметь одно и то же направление движения на всем протяжении длины трубы только в том случае, если параметр  $\lambda$  меньше другого максимального значения, которое рассчитывается следующим образом:

$$\lambda_{max} = \frac{1}{2} \ln \frac{\xi+1}{\xi-1}.$$

Обозначим через  $Q$  расход жидкости на выходе из трубы, а через  $Q_0$  расход жидкости на входе в трубу. На рисунке 1 кривые 1 и 2 ограничивают сверху рабочую область значений параметров  $\lambda$  и  $\xi$ . Эти кривые построены по приведенным выше формулам для  $\lambda_{max}$ . При заданных значениях  $\lambda$  и  $\xi$  отношение расходов  $Q/Q_0$  может быть найдено при помощи соотношения:

$$\frac{Q}{Q_0} = ch\lambda - \xi sh\lambda.$$

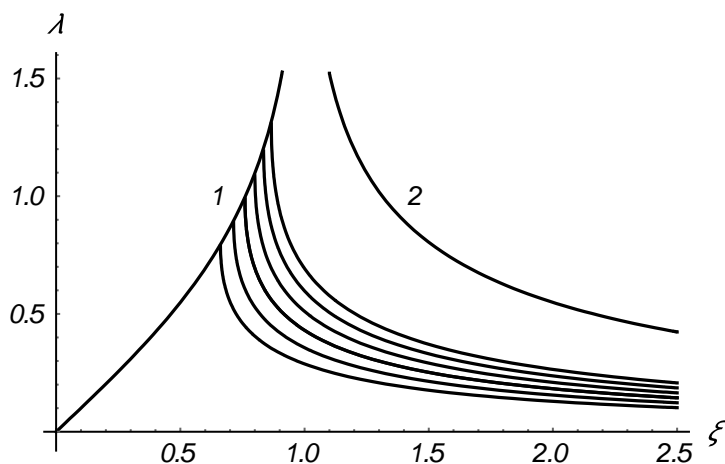


Рис.1. Зависимости  $\lambda_{max}(\xi)$  и  $\lambda(\xi)$  при различных значениях параметра  $Q/Q_0$  (0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75)

На рисунке 1 по этой формуле построены зависимости  $\lambda(\xi)$  при нескольких значениях отношения расходов  $Q/Q_0$ . Чем больше эта величина, тем ниже располагается график. Эти зависимости можно использовать для определения длины трубы при заданном значении  $Q/Q_0$ .

Построение второго приближения по малому параметру  $Re_w$  позволяет изучить влияние этого параметра на закономерности течения. При увеличении этого параметра продольная составляющая скорости на оси трубы увеличивается, а на стенке уменьшается. Уменьшение скорости проскальзывания связано с уменьшением производной от продольной составляющей скорости по радиальной координате. Радиальная составляющая скорости при увеличении числа Рейнольдса увеличивается. Точка, где достигается максимальное значение этой величины при увеличении числа Рейнольдса смещается в сторону оси.

Одна из проблем, возникающих при эксплуатации аппаратов, предназначенных для мембранного разделения, заключается в образовании на поверхности мембраны слоя осадка или гелеобразного слоя. В результате появления дополнительного сопротивления при движении жидкости через мембрану, наблюдается уменьшение производительности по фильтрату. Известен ряд методов, которые позволяют снизить вредное влияние образования осадка на протекание мембранного процесса. Так, например, применяют искусственную турбулизацию потока, может также использоваться механическое удаление осадка. Весьма перспективным методом является пульсирующая подача жидкости в аппарат. В результате на поверхности мембраны возникают высокие сдвиговые напряжения пульсирующего характера, которые препятствуют накоплению осадка на поверхности мембраны. В данной главе рассматривается колебательное движение жидкости в плоском канале с полушириной  $h$ . Предполагается, что расход жидкости на входе в трубу с проницаемыми стенками изменяется с течением времени  $\tau$  по периодическому закону:

$$Q_0 = Q_m(1 + A \cos \omega \tau).$$

Здесь  $Q_m$  – среднее по времени значение расхода,  $A$  – относительная амплитуда колебаний расхода,  $\omega$  – частота колебаний. В данном разделе рассматривается движение жидкости в плоском канале с проницаемыми стенкам, полуширина канала  $h$ . Предполагается, что проскальзыванием на стенках канала можно пренебречь. При переходе к безразмерным переменным появляется дополнительный безразмерный параметр – так называемое число Вомерсли:

$$\alpha = h \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}.$$

Здесь  $\nu = \mu/\rho$  – кинематическая вязкость жидкости. В данном разделе найдены аналитические выражения для проекций скорости, давления, напряжения трения на стенках канала. Наиболее простой вид формулы принимают при малых значениях параметра  $\alpha$ . Эти формулы показывают следующее. С точностью до главных членов разложений по параметру  $\alpha$  формулы для пульсационных составляющих продольной и поперечной проекций скорости имеют такой же вид, как и в отсутствии пульсаций, и не содержат параметр  $\alpha$ . Если пульсации скорости протекания жидкости через стенку канала отсутствуют, то амплитуда колебаний продольной составляющей скорости не изменяется по длине канала и совпадают начальные фазы колебаний расхода жидкости на входе в канал, продольной составляющей скорости и давления жидкости. Пульсации поперечной составляющей скорости в этом случае отсутствуют. При наличии пульсаций скорости протекания жидкости через стенку, имеется сдвиг по фазе между колебаниями расхода на входе в канал, колебаниями продольной и поперечной составляющих скорости и давления жидкости, изменяющийся, вообще говоря, по длине канала. Изменяться по длине канала будут также и амплитуды колебаний. По ширине канала начальные фазы колебаний продольной и поперечной составляющих скорости не изменяются.

Профили пульсационной составляющей продольной компоненты скорости имеют различный вид при малых и больших частотах пульсаций. При низких частотах пульсаций пульсационная составляющая скорости в зависимости от расстояния до оси изменяется монотонно. Экстремум достигается на оси. Исключение составляют моменты времени близкие к  $\pi/2$ . При больших значениях числа Вомерсли профили пульсационной составляющей скорости имеют вид, показанный на рисунке 2.

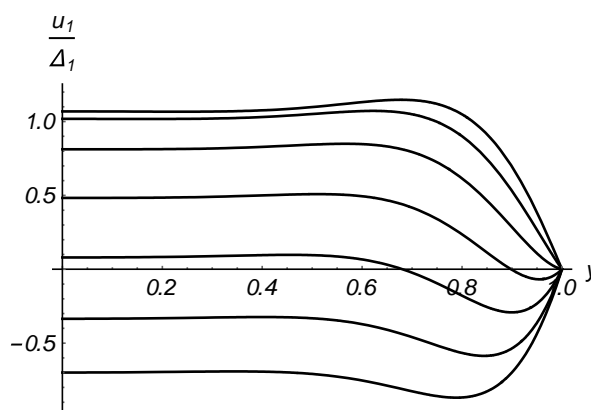


Рис.2. Зависимости  $\frac{u_1}{\Delta_1}$  от  $y$  при  $\alpha = 10$  для различных моментов времени ( $t = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}$ )

В том случае, когда расход жидкости через стенки канала определяется разностью давлений жидкости по разные стороны стенки, могут быть определены закономерности изменения продольной и поперечной составляющих скорости жидкости, а также давления

жидкости по длине канала. Давление жидкости на входе в канал изменяется по периодическому закону:

$$p|_{x=0} = p_0(1 + A_1 e^{-it}).$$

Проекции скорости жидкости на оси декартовой системы координат и давление жидкости представляются в виде суммы стационарной и пульсационной составляющих. Амплитуды и начальные фазы колебаний этих величин изменяются, вообще говоря, как по ширине, так и по длине канала. Однако закономерности изменения амплитуд колебаний скорости и давления одинаковы для различных значений продольной координаты.

Наличие проскальзывания на стенках канала, приводит к тому, что изменяются закономерности тепло- или массообмена жидкости или газа со стенками аппарата. На достаточно большом удалении от входа в аппарат процесс теплообмена приобретает установившийся характер. Как известно, при отсутствии проскальзывания критерий Нуссельта принимает постоянное значение, зависящее от типа граничных условий на стенке. В данной главе задача о нахождении критерия Нуссельта при двух типах граничных условий (постоянная температура стенки и постоянный тепловой поток на стенке) решена аналитически при наличии проскальзывания на стенке. Рассмотрены два случая: плоский канал и труба кругового поперечного сечения. Построены удобные для расчета формулы.

Критерий Нуссельта для трубы определяется по формуле:  $Nu = ad/\lambda$ . Здесь  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $d$  – диаметр трубы,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности жидкости. В том случае, когда на стенке трубы задан постоянный удельный поток теплоты, для критерия Нуссельта получено явное аналитическое выражение:

$$Nu = \frac{48(1+8b/d)^2}{11+128b/d+384b^2/d^2}.$$

При заданной температуре стенки температура жидкости представляется в виде ряда по степеням безразмерной переменной, представляющей собой отношение радиальной координаты к радиусу трубы. Коэффициенты перед степенями этой переменной связаны между собой при помощи рекуррентных соотношений. Они быстро убывают с ростом показателя степени. Это позволяет рассчитать критерий Нуссельта с любой наперед заданной степенью точности при различных значениях параметра  $b/d$ . Результаты расчетов можно аппроксимировать при помощи выражения:

$$Nu = \frac{3.656+14.99(2b/d)}{1+2.592(2b/d)}.$$

Аналогичные результаты получены для плоского канала.

Как известно, простые асимптотические формулы могут быть получены также в том случае, когда рассматривается теплообмен на малых расстояниях от начала обогреваемого (охлаждаемого) участка. Такие результаты впервые были получены еще в 20-х годах прошлого века и впоследствии неоднократно обобщались. Такого рода формулы получены для того случая, когда температура стенки постоянна. Другой вариант, который часто реализуется на практике, постоянный тепловой поток через стенку. В данной главе рассматривается обобщение такого типа формул на случай, когда температура стенки изменяется по степенному закону. При ламинарном режиме течения жидкости в трубе вид граничных условий оказывает существенное влияние на закономерности тепло- или массообмена. Поэтому решение подобной задачи является практически важной проблемой.

**Во второй главе** на основе полученных рядом исследователей экспериментальных данных, а также данных, полученных при помощи метода прямого численного моделирования турбулентных течений в плоских каналах и трубах кругового поперечного сечения, изучаются важные для практических приложений статистические характеристики подобных течений. На практике турбулентные течения встречаются гораздо более часто, чем ламинарные. Обычно, при проектировании тепло- и массообменных аппаратов (например, кожухотрубных теплообменников) стремятся обеспечить именно турбулентный режим течения, поскольку в этом случае процессы переноса протекают с более высокой скоростью. Однако теория турбулентности, основанная на фундаментальных законах

физики, до настоящего времени отсутствует. Существующие методы расчета по необходимости являются полуэмпирическими. Поэтому изучение турбулентных течений, основанное на достоверных данных, является весьма актуальным.

Простейшей и наиболее важной статистической характеристикой является осредненная скорость жидкости. К числу основополагающих представлений о турбулентных течениях, граничащих с твердой поверхностью, относятся законы подобия – закон стенки и закон дефекта скорости. Для течений в трубах и каналах осредненная (по ансамблю реализаций турбулентного потока) скорость жидкости имеет единственную ненулевую составляющую  $U$  – проекцию скорости на ось трубы или канала. Продольную, нормальную к стенке и поперечную составляющие пульсационной скорости будем обозначать через  $u$ ,  $v$  и  $w$  соответственно. Через  $\tau$  обозначим напряжение трения на стенке канала. Согласно закону стенки вблизи гладкой стенки осредненная скорость жидкости  $U$  зависит только от расстояния до стенки  $y$ , напряжения трения  $\tau$  и физических характеристик жидкости – ее плотности  $\rho$  и вязкости  $\mu$ . Другие величины, такие как средняя по сечению скорость жидкости, полуширина канала или радиус трубы на распределение скорости не влияют. Тогда, как вытекает из соображений размерности, должно иметь место следующее соотношение:

$$\frac{U}{u_\tau} = f\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right).$$

Здесь  $u_\tau = \sqrt{\tau/\rho}$  – динамическая скорость. Фигурирующее в правой части формулы отношение  $l_\tau = \nu/u_\tau$  называется динамической длиной. Обычно считают, что закон стенки выполняется при значениях  $y$  меньших примерно  $0.2h$ . Перейдем к безразмерным переменным, используя в качестве масштабов скорости и длины динамическую скорость и динамическую длину соответственно. Такие переменные называются переменными стенки. Их принято обозначать при помощи надстрочного индекса «плюс»:  $U^+ = U/u_\tau$ ,  $y^+ = y/l_\tau$ . В переменных стенки зависимость скорости от расстояния до стенки имеет универсальный характер:  $U^+ = f(y^+)$

Имеющиеся в литературе данные прямого численного моделирования показывают, что влияние числа Рейнольдса  $Re_\tau = u_\tau h/\nu$ , рассчитанного по динамической скорости, проявляется даже в непосредственной окрестности стенки. Рассмотрим, например, разложение в ряды Тэйлора напряжений Рейнольдса при малых  $y^+$ . Введем следующие обозначения для среднеквадратичных значений пульсаций скорости:  $u'^+ = \sqrt{u'^+{}^2}$ ,  $v'^+ = \sqrt{v'^+{}^2}$ ,  $w'^+ = \sqrt{w'^+{}^2}$ . Вблизи стенки должны выполняться соотношения:

$$-u'^+v'^+ = c_1 y'^+{}^3 + \dots, u'^+ = c_2 y'^+ + \dots, v'^+ = c_3 y'^+{}^2 + \dots, w'^+ = c_4 y'^+ + \dots.$$

В данной главе показано, что коэффициенты этих разложений не являются универсальными постоянными, а являются функциями числа Рейнольдса. Получены формулы для расчета этих коэффициентов. Аналогично обстоит дело со среднеквадратичными значениями пульсационной составляющей вихря скорости.

Отметим, что закономерности изменения статистических характеристик турбулентности в непосредственной окрестности стеки (в вязком подслое и буферной зоне) представляет большой интерес по той причине, что именно в этой области обычно сосредоточено основное сопротивление тепло- и массообмену, в особенности при больших значениях критериев Прандтля или Шмидта.

Напряжения Рейнольдса обращаются в нуль на стенке, на некотором расстоянии до стенки достигают максимального значения, а затем убывают. Касательное напряжение на оси канала обращается в нуль, а нормальные принимают некоторые конечные значения. Показано, что координаты точек, где достигаются максимальные значения касательных напряжений, а также сами эти значения, зависят от  $Re_\tau$  и получены формулы, описывающие эти зависимости.

При расчетах обычно известной величиной является не динамическая скорость, а средняя по сечению скорость жидкости  $U_m$ . Введем в рассмотрение число Рейнольдса, определенное по эквивалентному диаметру канала  $4h$  и средней по сечению скорости:

$$Re = \frac{4hU_m}{\nu}$$

На основе данных прямого численного моделирования показано, что в широком диапазоне значений числа Рейнольдса числа  $\ln(Re)$  и  $\ln(Re_\tau)$  связаны между собой при помощи линейного соотношения:

$$\ln(Re_\tau) = 0.8855\ln(Re) - 3.08.$$

В ядре потока на сравнительно больших расстояниях от стенки выполняется так называемый закон дефекта скорости. Согласно этому закону, справедливо равенство:

$$U_0^+ - U^+ = f_2\left(\frac{y}{h}\right).$$

В данной главе показано, что величина дефекта скорости, вообще говоря, зависит от числа Рейнольдса и получены формулы для расчета дефекта скорости.

Одним из важнейших вопросов прикладной гидравлики является расчет потерь давления на трение. В литературе предложено много различных формул, позволяющих рассчитать коэффициент трения  $\lambda$  как для труб с гладкими стенками, так и для труб с шероховатыми стенками. В результате появления новых, более надежных экспериментальных данных, возникает необходимость пересмотра этих соотношений. Для труб с гладкими стенками нами предложена следующая сравнительно простая формула:

$$\lambda = \frac{1}{(0.974\ln Re - 1.99\ln(\ln Re) + 1.101)^2}.$$

Для течения в плоском канале формула для расчета коэффициента трения получена при помощи данных, полученных различными авторами методом прямого численного моделирования. Эта формула напоминает известный универсальный закон сопротивления, но отличается от него наличием дополнительного слагаемого, позволяющего учесть отклонения от указанного закона при сравнительно малых значениях числа Рейнольдса:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{0.225}{\ln(Re\sqrt{\lambda}) - 6.23} + 0.912\ln(Re\sqrt{\lambda}) - 1.54.$$

Получены также формулы для расчета других интегральных характеристик поля скорости в плоском канале, в частности соотношения, которые позволяют найти зависимость между осевой и средней по сечению скоростью.

Как известно, существует аналогия между процессами переноса теплоты и импульса. Для поля температуры, как и для поля скорости, справедлив закон стенки. Введем следующие обозначения. Через  $q$  обозначим удельный тепловой поток, т.е. расход теплоты через единицу поверхности, через  $c_p$  удельную теплоемкость, через  $t$  температуру, а через  $t_w$  значение температуры на стенке. Так называемая динамическая температура  $t_\tau$  определяется при помощи соотношения:

$$t_\tau = \frac{q}{\rho c_p u_\tau}.$$

Безразмерная температура  $\theta^+$  определяется так:

$$\theta^+ = \frac{t - t_w}{t_\tau}.$$

Согласно закону стенки для температуры должно выполняться следующее равенство:

$$\theta^+ = f_3(y^+, Pr).$$

Здесь  $Pr = c_p \mu / \lambda$  – число Прандтля. В этой формуле  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности. Закон стенки для температуры выполняется на небольших расстояниях от стенки. В ядре потока справедлив закон дефекта температуры. Обозначим через  $\theta_0^+$  безразмерную температуру на оси канала. Закон дефекта температуры формулируется так:

$$\theta_0^+ - \theta^+ = f_4\left(\frac{y}{h}\right).$$

Данные прямого численного моделирования процесса теплообмена в плоском канале позволяют установить, что имеются определенные отклонения как от закона стенки для

температуры, так и от закона дефекта температуры. В частности, рассмотрим поток теплоты в направлении нормали к стенке, обусловленный турбулентным перемешиванием  $\overline{v^+t^+}$ . В окрестности стенки разложение в ряд Тэйлора для этой величины начинается со слагаемого, пропорционального  $y^{+3}$ :

$$\overline{v^+t^+} = c_t y^{+3} + \dots$$

Коэффициент  $c_t$  в этом соотношении зависит не только от числа Прандтля, но и от числа Рейнольдса, причем его зависимость от числа Прандтля при фиксированном значении числа Рейнольдса является нелинейной. Аналогичным образом обстоит дело и с другими статистическими характеристиками процесса переноса теплоты в турбулентном потоке. Зависящим от критериев Рейнольдса и Прандтля оказывается и дефект температуры. При различных значениях критерия Рейнольдса зависимость безразмерной температуры на оси канала от числа Прандтля является степенной, но показатель степени изменяется при изменении критерия Рейнольдса. Так, при  $Re_\tau = 180$  ( $Re = 11400$ )  $\theta_0^+ = 18.8Pr^{0.56}$ , а при  $Re_\tau = 395$  ( $Re = 38100$ )  $\theta_0^+ = 20.1Pr^{0.506}$ . Аналогично обстоит дело и с зависимостью от критерия Прандтля критерия Нуссельта. При  $Re_\tau = 180$  справедлива формула:  $Nu = 43.8Pr^{0.38}$ , а при  $Re_\tau = 395$  показатель степени заметно больше:  $Nu = 83.9Pr^{0.49}$ . Это означает, что использование для расчета теплоотдачи простого степенного соотношения вида:  $Nu = cRe^nPr^m$ , где  $c$ ,  $n$  и  $m$  – некоторые константы, не вполне оправдано.

Важнейшей характеристикой турбулентных потоков жидкостей и газов является наличие завихренности. Однако экспериментальное измерение проекций пульсационной составляющей вихря скорости представляет собой весьма сложную проблему. В особенности это относится к области, расположенной вблизи твердой стенки. Наиболее детальную информацию о распределении завихренности по сечению трубы или канала дают результаты, полученные на основе метода прямого численного моделирования. Обозначим через  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  – среднеквадратичные значения проекций пульсационной составляющей вихря скорости на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно, а через  $\omega$  – среднеквадратичное значение модуля вектора пульсационной составляющей скорости:  $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$ . Величину  $\omega^2/2$  иногда называют энтрофией. В окрестности стенки распределение завихренности является существенно анизотропным, т.е. величины  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  сильно различаются между собой. При фиксированном значении  $y^+$  в переменных стенки указанные величины с ростом числа Рейнольдса увеличиваются.

Из трех слагаемых, входящих в выражении для  $\omega^2$ , вблизи стенки наибольшее значение имеет третье, т.е. вблизи стенки наибольшие значения имеет осевая составляющая вихря скорости. Величина  $\omega_z^2/\omega^2$  вблизи стенки в пределах вязкого подслоя достигает максимального значения, а затем убывает. Это максимальное значение убывает при увеличении критерия Рейнольдса, но во всей области значений этого параметра, в которой имеются результаты прямого численного моделирования, превышает 0.83. Величина  $\omega_x^2/\omega^2$  в пределах вязкого подслоя убывает, достигает минимального значения, затем увеличивается и достигает максимум. Минимальное значение увеличивается с ростом числа Рейнольдса, но не превышает 0.13. Величина  $\omega_y^2/\omega^2$ , которая на стенке равна нулю, в окрестности стенки увеличивается. В переменных стенки расстояния до стенки, где различные проекции вихря скорости существенно различаются, не превышают 100. Во внешней области среднеквадратичные значения проекций пульсационной составляющей вихря скорости примерно одинаковы. В той области, где справедлива логарифмическая зависимость скорости от расстояния до стенки, вид зависимости  $\omega^2$  от  $y/h$  можно установить из следующих соображений. В уравнении баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций диссипация энергии  $\varepsilon$  в единице объема жидкости примерно равна слагаемому, описывающему обмен энергией между осредненным и пульсационным движением:



$$\varepsilon \approx -\overline{uv} \frac{dU}{dy}.$$

В логарифмическом пограничном слое  $-\overline{uv} = u_\tau^2$  и  $dU/dy = u_\tau/(ky)$ . Для однородной турбулентности  $\varepsilon = \nu\omega^2$ . С хорошей точностью это соотношение выполняется и в логарифмическом пограничном слое. В результате получаем следующую формулу:

$$Re_\tau \omega^{+2} = \frac{h}{ky}.$$

Согласно этой формуле при фиксированном значении безразмерной координаты  $y/h$  величина  $Re_\tau \omega^{+2}$  не зависит от  $Re_\tau$ . Данные прямого численного моделирования свидетельствуют о том, что такой вывод в первом приближении справедлив во всей внешней области течения. На оси канала величину  $\omega^2$  можно вычислить при помощи простой формулы:

$$\omega^{+2} = \frac{1}{Re_\tau}.$$

Соотношение для расчета зависимости  $\omega^2$  от  $y/h$ , записанное выше, не может выполняться в окрестности оси канала. Слагаемое в уравнении баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций, которое описывает обмен энергией между осредненным движением и турбулентными пульсациями, на оси канала обращается в нуль и в окрестности оси является малым. В этой области главные слагаемые – диссипация энергии в единице объема и слагаемое, описывающее перенос энергии за счет пульсаций давления. Заметим, что в силу симметрии, производная по  $y$  от  $\omega^{+2}$  на оси канала должна обращаться в нуль. Поэтому данное соотношение следует модифицировать таким образом, чтобы это условие выполнялось. В результате получается следующая формула:

$$Re_\tau \omega^{+2} = \frac{2.5}{Y} - 1.5Y + 2.5 \ln Y + 6.3(1 - Y)^2.$$

Здесь  $Y = y/h$ .

Одной из важнейших характеристик турбулентного течения является кинетическая энергия турбулентных пульсаций, которая определяется таким образом:

$$k^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Эта величина определяет интенсивность турбулентного перемешивания и такие характеристики как турбулентная (вихревая) вязкость, коэффициент турбулентной диффузии и т.п. Поэтому закономерности распределения кинетической энергии турбулентных пульсаций в потоке, а также влияние на это распределение числа Рейнольдса, представляет значительный интерес. В инженерных приложениях при расчете турбулентных течений для нахождения кинетической энергии турбулентных пульсаций используют модельные уравнения, которые требуют проверки. Экспериментальное измерение осредненной по времени кинетической энергии турбулентных пульсаций представляет собой сложную задачу. Требуется одновременно замерять все три компоненты пульсационной составляющей скорости, причем для измерений необходимо использовать датчики малого размера. По этой причине при помощи миниатюрных термоанемометров часто измеряют только одну, продольную составляющую скорости.

Именно эта составляющая дает главный вклад в кинетическую энергию турбулентных пульсаций. Следует отметить, что до последнего времени отсутствует единая точка зрения на закономерности изменения кинетической энергии пульсационного движения при увеличении числа Рейнольдса. Ряд авторов полагают, что в окрестности стенки с ростом числа Рейнольдса эта величина увеличивается как  $\ln Re_\tau$ . Другое мнение заключается в том, что кинетическая энергия турбулентных пульсаций при неограниченном возрастании числа Рейнольдса стремится к конечному пределу. Детальную информацию о закономерностях распределения кинетической энергии турбулентных пульсаций в зависимости от расстояния до стенки можно получить при помощи результатов, полученных методом прямого численного моделирования. Полученные в работе

результаты показывают, что имеется существенная анизотропия распределения пульсационной скорости в области течения вблизи стенки. Наиболее ярко выраженной такая анизотропия является в окрестности стенки (в вязком подслое и буферной области).

С ростом числа Рейнольдса она несколько сглаживается. В этой же области кинетическая энергия пульсационного движения является максимальной. С ростом числа Рейнольдса, рассчитанного по динамической скорости жидкости, максимальное значение кинетической энергии увеличивается примерно пропорционально логарифму числа Рейнольдса. Во внешней области продольные пульсации скорости также преобладают.

**В третьей главе** предложена физически обоснованная модель поля скорости жидкости в гидроциклоне. Модель позволяет разработать методику расчета процесса классификации суспензии по крупности частиц в гидроциклоне. Результаты расчета по модели сопоставляются с результатами экспериментов. Следует отметить, что используемые при практических расчетах гидроциклонов формулы имеют главным образом эмпирический характер. В последние годы в ряде работ производились расчеты поля скорости в гидроциклоне на основе различных моделей турбулентности. Однако эти расчеты довольно сложны и вряд ли могут быть положены в основу инженерной методики расчетов процессов классификации. В данной главе предложена сравнительно простая модель, учитывающая тем не менее главные особенности процесса.

Предполагается, что центробежные силы, действующие на жидкость в гидроциклоне, существенно превышают силы вязкого трения. Турбулентными напряжениями в первом приближении также можно пренебречь и считать, что течение мало отличается от осесимметричного. Ведем в рассмотрение цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$ , ось  $z$  которой направлена по оси аппарата, а через  $u, v$  и  $w$  в данной главе будем обозначать осевую, радиальную и тангенциальную составляющие скорости жидкости. Введем в рассмотрение функцию тока  $\psi$  по формулам:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v\psi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

При сделанных допущениях для функции тока можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = r^2 \frac{dH}{d\psi} - C \frac{dC}{d\psi}.$$

Здесь величины  $C$  и  $H$  определяются при помощи соотношений:

$$C = rw, \quad H = \frac{v}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

В работе установлены условия, при которых уравнение для функции тока имеет автомодельное решение, т.е. сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Введем новые переменные  $s$  и  $F$  по формулам:

$$s = \frac{r}{z}, \quad \psi = z^m F(s).$$

Здесь  $m$  – некоторый параметр. Поверхность  $s = const$  является конической поверхностью. Поэтому поверхность гидроциклона описывается уравнением:

$$s = s_0 = tg\alpha.$$

Здесь  $\alpha$  – угол полураствора конуса, являющегося поверхностью гидроциклона. Для того, чтобы уравнение для функции тока сводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению, необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\frac{dH}{d\psi} = -a\psi^{\frac{m-4}{m}}, \quad C \frac{dC}{d\psi} = b\psi^{\frac{m-2}{m}}.$$

Здесь  $a$  и  $b$  – постоянные. Уравнение для нахождения зависимости  $F(s)$  имеет следующий вид:

$$(1 + s^2) \frac{d^2 F}{ds^2} - \left[ \frac{1}{s} + 2(m-1)s \right] \frac{dF}{ds} + (m-1)mF = -as^2 F^{\frac{m-4}{m}} - bF^{\frac{m-2}{m}}.$$

Параметры  $m, a$  и  $b$  в этом уравнении должны определяться из граничных условий. В итоге построение решения данного обыкновенного дифференциального уравнения позволяет рассчитать поле скорости в гидроциклоне. Иными словами, можно найти зависимости всех

трех составляющих скорости жидкости (осевой, радиальной и тангенциальной) от координат. Эта информация используется для разработки метода расчета классификации суспензии по крупности частиц в гидроциклоне.

В четвертой главе предложена модель барботажного перемешивания жидкости в аппарате кольцевого поперечного сечения. При переработке отработанного ядерного топлива возникает проблема перемешивания радиоактивных растворов а аппаратах кольцевого сечения. Использование механических перемешивающих устройств в этой ситуации исключается. Для перемешивания используют подачу сжатого воздуха в нижнюю часть аппарата. В том случае, когда подача газа осуществляется через несколько сопел малого диаметра, над местом подачи газа возникает восходящая газожидкостная струя. Она представляет собой поднимающуюся вверх дорожку пузырьков, увлекающих за собой прилегающую к ним жидкость. В той зоне аппарата, которая располагается между точками подачи газа, жидкость будет опускаться вниз. В результате в кольцевой емкости возникают зоны циркуляции жидкости. Суммарный расход жидкости через любое горизонтальное сечение аппарата равен нулю. Опыты на лабораторной модели малого размера показывают, что в целом движение является довольно хаотичным. Об этом свидетельствуют измерения температуры в различных точках емкости при подаче в аппарат порции нагретой жидкости, а также наблюдения за окрашенной жидкостью. Можно полагать, что в аппарате возникает турбулентное перемешивание жидкости, интенсивность которого возрастает по мере увеличения расхода газа на перемешивание. Для описания перемешивания можно предложить простую модель ячеечного типа. Весь объем жидкости разбивается на несколько ячеек одинакового объема, в каждой из которых предполагается идеальное перемешивание жидкости. Поскольку в аппарате возникает циркуляционное движение, жидкость перетекает из ячейки в ячейку, причем образуется замкнутый циркуляционный контур. Одна дополнительная ячейка меньшего объема соответствует подаваемому в аппарат индикатору.

Ячейки перенумерованы по ходу циркуляции жидкости. Ячейка с номером 1 представляет собой поданную в аппарат на смешение жидкость. Через  $q$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) обозначен объемный расход циркулирующей жидкости. Схема такой модели с пятью ячейками показана на рисунке 3. В общем случае число ячеек обозначим через  $n$ . Объемную концентрацию индикатора в  $i$ -ой ячейке обозначим через  $c_i$  ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ). В начальный момент времени концентрация индикатора во всех ячейках кроме первой равна нулю. Масса индикатора в  $i$ -ой ячейке будет равна  $M_i = c_i V_i$ , где  $V_i$  – объем  $i$ -ой ячейки. Объемы всех ячеек, кроме ячейки с номером 1, считаем одинаковыми. Для каждой ячейки запишем уравнение материального баланса:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{d\tau} &= qc_n - qc_1, \\ \frac{dM_2}{d\tau} &= qc_1 - qc_2, \\ &\dots \\ \frac{dM_n}{d\tau} &= qc_{n-1} - qc_n. \end{aligned}$$

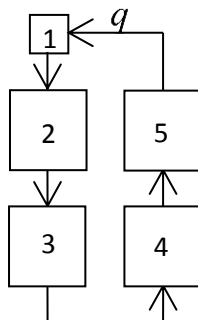


Рис.3. Схема модели перемешивания

Здесь  $\tau$  – время. В отличие от обычной ячеечной модели, используемой для описания перемешивания сред в аппаратах колонного типа, расход  $q$  не является при расчете заданной величиной. Его практически невозможно определить экспериментально, так как фактически в аппарате никаких ячеек нет и скорости циркуляционного движения изменяются как по ширине, так и по высоте аппарата. Наиболее целесообразно рассматривать эту величину, как один из параметров модели, который наряду с числом ячеек будет определять время перемешивания. Этот параметр, так же как и число ячеек, должен определяться по данным эксперимента в зависимости от условий проведения процесса. Наиболее важными величинами, влияющими на выбор параметров, являются: расход газа, геометрические размеры аппарата, плотность газа, а также физические характеристики жидкости: ее вязкость и плотность и поверхностное натяжение на границе раздела газа и жидкости.

Преимуществом моделей ячеечного типа является сравнительная легкость масштабирования в реальных аппаратах. В том случае, когда периметр аппарата увеличивается и газ на перемешивание подается не через одно сопло, а через несколько сопел, расположенных на равном расстоянии друг от друга, весь объем жидкости можно разбить на ячейки таким образом, чтобы образовать число контуров циркуляции по числу точек подачи газа.

На рисунке 4 показано изменение экспериментально определяемой температуры воды  $t$  в нижней части емкости с течением времени со стороны, противоположной точке подачи газа. Там же представлен график изменения температуры в ячейке номер 3 по ячеечной модели.

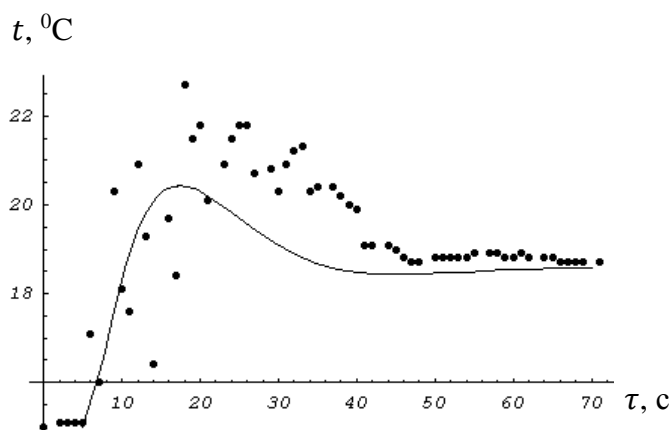


Рис.4. Сопоставление экспериментальных данных и расчета по модели. Точки – экспериментальные данные, кривая – расчет по модели

**В пятой главе** рассматриваются закономерности дробления струй жидкости на капли в результате развития капиллярных волн на поверхности струи. Впервые эта задача была рассмотрена более ста лет назад в работах Рэлея. Он рассмотрел развитие малых возмущений на поверхности струи идеальной жидкости. Значительно позднее была разработана нелинейная теория, которая позволяет анализировать развитие возмущений малой, но конечной амплитуды. Однако многие практически важные вопросы остаются нерешенными до сих пор.

Изучение закономерностей капиллярного дробления струй жидкости представляет практический интерес с различных точек зрения. Во-первых, эта задача связана с проблемой монодиспергирования струй жидкости, т.е. обеспечения таких условий, чтобы образующиеся капли имели одинаковые размеры. Кроме того, вторичный распад жидких капель на более мелкие капли, который необходимо обеспечить во многих случаях (например, в экстракторах роторного типа), происходит в результате капиллярной

неустойчивости. Для понимания механизма такого рода процессов и создания простых моделей, описывающих эти процессы, требуется решение рассматриваемых ниже задач.

В начале главы рассматривается постановка задачи о развитии капиллярных волн на поверхности струи жидкости. Если окружающей средой является газ, а скорость жидкости в струе сравнительно невелика, нет необходимости учитывать взаимодействие струи с окружающей средой. Это так называемая струя со свободной поверхностью. В этом случае уравнения движения нужны только для описания движения жидкости внутри струи, а на поверхности струи выполняются два условия. Давление окружающей среды на поверхности струи можно считать постоянным, а касательные напряжения на поверхности струи отсутствуют. На жидкость внутри струи действует четыре типа сил: силы инерции, силы вязкого трения, сила тяжести и капиллярные силы. Развитие капиллярных волн на поверхности струи, которое приводит в конечном счете к дроблению струи жидкости на капли, происходит под действием сил поверхностного натяжения. Сила поверхностного натяжения представляет собой движущую силу процесса капиллярного распада струи и в задачах рассматриваемого типа всегда должна приниматься во внимание. Соотношение между силами инерции, силами тяжести и силами вязкого трения может быть различным. Если скорость движения жидкости в струе достаточно велика, а вязкость жидкости мала, то сила инерции преобладает над силами вязкого трения в жидкости и силой тяжести. В этом случае движение жидкости в струе описывается при помощи уравнений движения идеальной жидкости, а на поверхности струи выставляется кинематическое граничное условие и только одно динамическое граничное условие – условие для нормальных напряжений. Другая формулировка задачи необходима в том случае, когда следует принимать в расчет и силы инерции и силы вязкого трения. Для описания движения жидкости в струе в этом случае используются уравнения Навье-Стокса, а на поверхности струи выставляется кинематическое граничное и два динамических граничных условия: условие для нормальных напряжений и условие для касательных напряжений.

В данной диссертации рассматривается задача о капиллярной устойчивости струи несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости, имеющей цилиндрическую форму. Как было показано еще Рэлеем, к распаду струи на капли приводит рост осесимметричных возмущений. Поэтому здесь будут рассматриваться именно такие возмущения. Предполагается, что скорость жидкости в струе достаточно велика. В этом случае влиянием силы тяжести на процесс распада жидкой струи под действием капиллярных сил можно пренебречь. При решении задачи удобно использовать безразмерные переменные. Обозначим через  $a$  радиус струи, через  $\rho$  и  $\mu$  – плотность и вязкость жидкости, через  $\sigma$  – поверхностное натяжение на границе раздела между жидкой струей и окружающей средой (газом). Тогда радиус цилиндрической струи  $a$  можно использовать в качестве линейного масштаба, в качестве масштаба времени введем величину  $t_0 = (\rho a^3 / \sigma)^{1/2}$ , в качестве масштаба скорости жидкости величину  $v_0 = (\sigma / \rho a)^{1/2}$ , а в качестве характеристического масштаба давления жидкости величину  $p_0 = \sigma / a$ . Уравнения, описывающие течение жидкости в струе, представляют собой уравнение неразрывности, осевую и радиальную составляющие уравнения Навье-Стокса. На свободной поверхности струи выставляется кинематическое граничное условие и два динамических граничных условия. Одно из них означает, что на поверхности струи обращается в нуль тангенциальная к поверхности составляющая вектора вязкого напряжения. Согласно второму условию нормальная к поверхности составляющая вектора напряжения по разные стороны от поверхности различается на величину  $\sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  где  $R_1$  и  $R_2$  главные радиусы кривизны поверхности струи в продольном и поперечном направлениях.

Второй раздел данной главы посвящен изучению формы струи жидкости, вытекающей через сопло. При движении жидкости через сопло в струе формируется профиль скорости. Если отношение длины сопла к его диаметру сравнительно велико,

профиль скорости будет иметь параболическую форму. В случае короткого сопла образуется лишь сравнительно тонкий пограничный слой вблизи стенок сопла. За соплом на поверхности струи касательные напряжения отсутствуют. По этой причине в струе будет происходить релаксация профиля скорости и на некотором расстоянии от среза сопла профиль скорости становится плоским. Релаксация происходит по-разному в зависимости от соотношения между силами инерции и силами вязкого трения. При больших значениях числа Рейнольдса струя будет сжиматься, при малых – расширяться. С практической точки зрения наибольший интерес представляет первый случай. Влияние поверхностного натяжения является более сложным, когда жидкость полностью смачивает материал сопла (нулевое значение краевого угла). В этом случае отрыв поверхности струи от сопла происходит не на срезе сопла, а на некоторой круговой линии на внешней поверхности сопла (см. рисунок 5).

Поверхность струи приобретает приблизительно цилиндрическую форму только на определенном удалении от сопла. Вблизи сопла на поверхности струи имеется зона, соединяющая внешнюю поверхность сопла и цилиндрическую часть струи. Длина этой зоны, где диаметр поперечного сечения струи заметно изменяется, существенно зависит от скорости жидкости в струе. Она превышает диаметр струи при низких скоростях и уменьшается при больших. Числа Рейнольдса и Вебера предполагаются большими ( $Re \gg 1, We \gg 1$ ). Число Рейнольдса определяется по формуле:  $Re = \frac{\rho U R_0}{\mu}$ , где  $U$  – средняя по сечению сопла скорость жидкости. Число Вебера определяется следующим образом:  $We = \frac{\rho U^2 R_0}{\sigma}$ . При больших значениях числа Рейнольдса у поверхности струи образуется сравнительно тонкий пограничный слой, в пределах которого производная от осевой составляющей скорости жидкости по радиальной координате быстро изменяется от ее значения в ядре струи, до нулевого значения на поверхности струи. В этой области может использоваться приближенная теория, основанная на идеях теории пограничного слоя. В частности, в работе получено автомодельное решение уравнений пограничного слоя, описывающее движение жидкости вблизи поверхности струи.

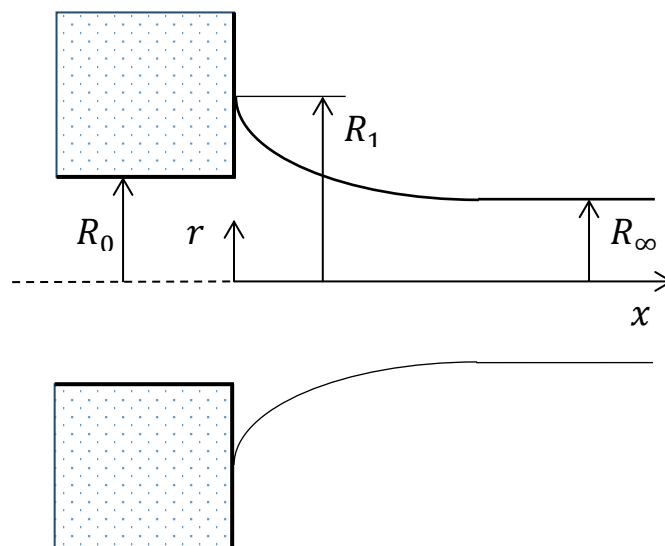


Рис.5. Схема движения струи жидкости в окрестности сопла

На достаточном удалении от среза сопла может быть построено другое приближенное решение. Основная идея заключается в том, что диаметр струи на данном участке медленно изменяется при изменении продольной координаты и процесс релаксации профиля скорости в струе мало отличается от процесса релаксации профиля скорости в струе

цилиндрической формы. Построенные решения позволяют оценить длину  $L$  той зоны, где происходит изменение радиуса струи:

$$L = 0.6R_0 \frac{Re^{2/5}}{We^{3/5}}.$$

Формула неплохо согласуется с данными экспериментов.

Следующий раздел данной главы посвящен построению приближенных одномерных уравнений динамики струи. Необходимость построения этих уравнений диктуется следующими соображениями. Для описания нелинейного взаимодействия капиллярных волн на поверхности струи могут использоваться различные методы. Один из этих методов заключается в построении решения задачи в виде ряда по степеням малого параметра, представляющего собой начальное значение амплитуды возмущения. Недостаток этого метода заключается в том, что полученное решение пригодно только до тех пор, пока амплитуда возмущения остается малой. На заключительном этапе дробления струи амплитуда капиллярных волн имеет такой же порядок величины, что и радиус струи. Другой метод заключается в прямом численном решении точных нелинейных уравнений гидромеханики. Трудоемкость такого решения приводит к тому, что систематическое исследование влияния различных факторов на процесс капиллярного распада струи при помощи этого метода невозможно. В качестве альтернативы можно использовать третий метод. Этот метод заключается в описании нелинейного взаимодействия капиллярных волн при помощи приближенных нелинейных уравнений. Как было показано еще Рэлеем, распад струи жидкости на капли происходит в результате роста длинноволновых возмущений, длина волны которых превышает длину окружности, ограничивающей сечение струи. Поэтому наибольший интерес представляют возмущения с большой длиной волны. Приближенные одномерные уравнения могут быть построены на основе предположения о том, что поперечный линейный масштаб изменения гидромеханических величин является малым по сравнению с продольным масштабом. Эти уравнения пригодны для описания возмущений с малым волновым числом. Уравнения построены для струй идеальной жидкости.

Полученные приближенные уравнения могут быть использованы для численного моделирования процесса распада струи жидкости под действием капиллярных сил. По сравнению с исходными уравнениями гидромеханики они являются более простыми и построение их численного решения менее трудоемко. Поэтому на основе данных уравнений можно осуществлять систематическое исследование влияния различных факторов на процесс распада, например, влияние начального значения амплитуды возмущения, формы возмущения и т.п.

В том случае, когда возмущения возникают самопроизвольно, возможно появление возмущений с различными длинами волн. Так как наибольшей скоростью роста обладает возмущение с определенной длиной волны, распад струи жидкости на капли может произойти благодаря росту возмущения именно с такой длиной волны. Расчет длины волны возмущения, скорость роста которого максимальна, может быть произведен с помощью соотношения, полученного Рэлеем. Однако, такие вычисления являются довольно трудоемкими, поскольку требуется многократно решать трансцендентное уравнение, содержащее функции Бесселя. В работе построены простые расчетные соотношения для нахождения длины волны возмущения, обладающего наибольшей скоростью роста, а также скорости роста такого возмущения.

Линейная теория устойчивости использована для изучения механизма вторичного дробления капель вытянутой формы, имеющих линейное распределение скорости жидкости по длине капли. Такой процесс происходит, когда капля получает значительную деформацию под воздействием импульса давления. В качестве приближенной модели можно рассматривать удлинненную деформирующуюся каплю как цилиндрическую струю, подверженную одноосному растяжению. Обозначим через  $a^{(0)}$  начальное значение радиуса

струи, а через  $a_t^{(0)}$  – производную по времени от радиуса струи в начальный момент времени. В качестве характерных масштабов длины, скорости, времени и давления будем использовать величины  $a^{(0)}$ ,  $v^{(0)} = -2a_t^{(0)}$ ,  $t^{(0)} = a^{(0)}/v^{(0)}$  и  $a^{(0)}/\sigma$  соответственно. Поскольку в данном случае имеется независимый масштаб скорости, уравнения движения струи будут содержать безразмерный критерий Вебера, который определяется по формуле:  $We = \rho a^{(0)}(v^{(0)})^2/\sigma$ . Уравнения движения имеют решение следующего вида:

$$u = u_0 = z/\tau, v = v_0 = -r/(2\tau), \eta = \eta_0 = \tau^{1/2}, \tau = 1 + t, p = p_0 = p_a + 3We(1 - \tau r^2)/(8\tau^3).$$

Рассматриваемое решение описывает одноосное растяжение струи, происходящее под действием сил инерции. Оно может служить приближенной моделью течения в цилиндрической части капли на некотором расстоянии от сопла, где можно пренебречь радиальной зависимостью скорости. Если жидкость можно считать идеальной, то, в соответствии с теоремой Лагранжа, течение, которое является безвихревым в начальный момент времени, остается безвихревым и во все последующие моменты времени. По этой причине можно ввести в рассмотрение потенциал скорости жидкости  $\varphi$ , который удовлетворяет уравнению Лапласа. Если решение для потенциала скорости получено, то давление жидкости может быть найдено при помощи интеграла Лагранжа-Коши. Будем искать потенциал скорости  $\varphi$ , давление жидкости  $p$  и радиус струи  $\eta$  в виде рядов следующего вида:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots \\ p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \\ \eta = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \dots \end{cases}$$

Здесь  $\varphi_0$  – потенциал скорости течения, представляющего собой одноосное растяжение струи. В результате растяжения струи, имеющиеся в начальный момент времени возмущения также будут деформироваться. Будем искать величины  $\varphi_1$ ,  $p_1$  и  $\eta_1$  в следующем виде:

$$\begin{cases} \varphi_1 = f_1(r, t)\cos(kz), \\ p_1 = s_1(r, t)\cos(kz), \\ \eta_1 = \tau^{-1/2}\delta_1(r, t)\cos(kz). \end{cases}$$

Здесь волновое число  $k(t)$  изменяется с течением времени по следующему закону:

$$k = \frac{k_0}{\tau}.$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для амплитуды возмущения радиуса струи  $\delta_1(t)$  будет иметь вид:

$$\delta_{1tt} + \left[ \frac{3}{2}x(\Phi(x) - F(x)) - 1 \right] \frac{\delta_{1t}}{\tau} = \tau^{3/2}xF(x) \left[ \frac{1-x^2}{We} - \frac{3}{4\tau^{7/2}} \right] \delta_1.$$

Здесь введены обозначения:

$$x = k_0\tau^{-3/2}, \Phi(x) = I_0(x)/I_1(x), F(x) = I_0(x)/I_1(x),$$

$I_0(x)$   $I_1(x)$  и – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка. В отличие от классической задачи Рэлея коэффициенты в полученном дифференциальном уравнении зависят от времени. Поэтому зависимость амплитуды возмущения радиуса струи от времени не имеет простого экспоненциального характера и должна определяться путем численного интегрирования этого обыкновенного дифференциального уравнения.

Эволюция капиллярных волн на поверхности такой струи обладает рядом особенностей. С течением времени текущее значение радиуса струи уменьшается, а текущее значение длины волны наоборот увеличивается. Поэтому в отличие от струи постоянного диаметра неустойчивыми оказываются возмущения с любой длиной волны.

Оказывается, что по-разному ведут себя коротковолновые и длинноволновые возмущения. При относительно малых значениях  $k_0$  увеличение амплитуды возмущения



начинается сразу, но скорость роста сравнительно невелика. Градиент давления вдоль оси струи, который возникает при деформации струи под действием капиллярных сил, в результате растяжения струи оказывается сравнительно небольшим, что и обуславливает относительно малую скорость роста возмущений. Иной характер имеет решение в том случае, когда в начальный момент времени возмущение является коротковолновым ( $k_0$  велико по сравнению с единицей). Коротковолновые возмущения в начальный промежуток времени представляют собой осцилляции со слабо изменяющейся амплитудой и возрастающим периодом колебаний. С течением времени длина волны возмущения увеличивается пропорционально  $\tau$ , а радиус струи уменьшается пропорционально  $\tau^{-1/2}$ . Поэтому по истечении определенного промежутка времени течение становится неустойчивым и амплитуда возмущения поверхности струи начинает быстро нарастать (см. рисунок б).

В том случае, когда начальное значение длины волны возмущения очень мало, то есть волновое число велико ( $k_0 \rightarrow \infty$ ) можно получить явные асимптотические формулы, описывающие начальный период развития возмущений. Такая коротковолновая асимптотика строится при условии, что значение  $t$  фиксировано, а волновое число  $k_0$  велико.

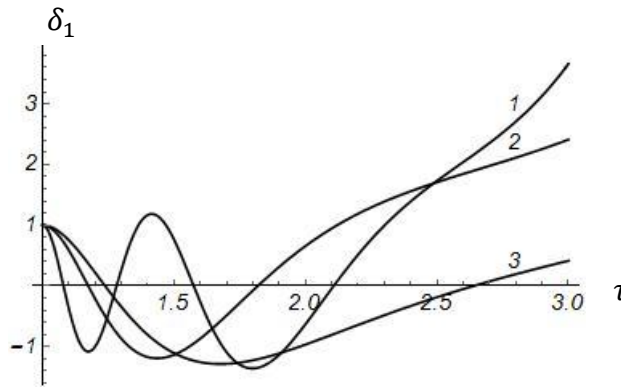


Рис.6. Зависимость амплитуды возмущения радиуса струи  $\delta_1$  от безразмерного времени  $\tau$  при  $k_0 = 4$ .  $We = 0.12; 0.52; 0.92$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно)

При помощи стандартных методов нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае имеет место формула:

$$\delta_1 = \tau^{1/2} \left\{ A(\cos \omega + \Delta k_0^{-1/2} \sin \omega) + B(\sin \omega - \Delta k_0^{-1/2} \cos \omega) + O(k_0^{-1}) \right\}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{We}} \left( \frac{2k_0^{3/2}}{\sqrt{\tau}} + \frac{\tau \sqrt{k_0}}{4} \right), \quad \Delta = \frac{3\sqrt{We}}{8\tau} + \frac{19\tau^{5/2}}{80\sqrt{We}},$$

$A$  и  $B$  – постоянные интегрирования. Соотношение применимо только при таких значениях  $t$ , пока текущее значение длины волны мало по сравнению с текущим значением радиуса струи, т.е. при условии, что значение величины  $k_0 \tau^{-3/2}$  велико. Формула показывает, что в начальный период времени поверхность струи совершает колебания, амплитуда которых слабо изменяется, а период колебаний с течением времени увеличивается.

Чем меньшее значение имеет число Вебера, тем большую роль играют капиллярные силы и тем быстрее происходит увеличение амплитуды возмущения радиуса струи. Число колебаний, которое успевает совершить поверхность струи до момента начала монотонного изменения амплитуды, при увеличении числа Вебера уменьшается.

Каково бы ни было начальное значение длины волны возмущения, по истечении определенного промежутка времени текущее значение радиуса струи окажется малым по сравнению с текущим значением длины волны. Такого рода возмущения становятся неустойчивыми и их амплитуда быстро увеличивается. Можно получить асимптотическую формулу, описывающую поведение решения при больших значениях времени  $t$ . При фиксированном значении  $k_0$  и больших значениях  $t$  аргумент  $x$  модифицированных функций Бесселя, входящих в уравнение для амплитуды возмущения радиуса струи, становится малым и это уравнение можно упростить. Асимптотику при больших значениях  $t$  полученного таким образом уравнения можно найти при помощи стандартных методов:

$$\delta_1 \sim \frac{k_0^{5/12}}{\tau^{5/8}} \exp \left[ \left( \frac{8}{We} \right)^{1/2} k_0 \tau^{1/4} \right] \left( 1 - \frac{15}{8(8/We)^{1/2} k_0 \tau^{1/4}} + O(\tau^{-1/2}) \right), \tau \gg 1.$$

Полученная формула показывает, что при больших значениях времени  $t$  скорость роста возмущений оказывается тем больше, чем больше начальное значение волнового числа  $k_0$ . Таким образом, чем больше  $k_0$ , тем больше оказывается промежуток времени, по истечении которого длина волны возмущения оказывается сравнимой с радиусом струи и тем позднее начинается рост амплитуды возмущения. С другой стороны, чем больше  $k_0$ , тем быстрее будет развиваться неустойчивость при больших  $t$ .

Рассмотрено также нелинейное развитие возмущений на поверхности растягивающейся струи. Как известно, в результате нелинейного развития возмущений возбуждаются кратные гармоники, т.е. возмущения, длина волны которых в два, три и т.д. число раз меньше длины волны первоначально возникшего возмущения. По мере уменьшения радиуса струи скорость роста коротковолновых возмущений увеличивается. Поэтому распад на капли может произойти благодаря развитию не основной, а одной из кратных гармоник.

Дифференциальное уравнение для амплитуды возмущения радиуса струи, подверженной одноосному растяжению, может быть решено только в случае идеальной жидкости. В случае жидкой цилиндрической струи постоянного радиуса для длинноволновых возмущений влияние вязкости приводит к некоторому уменьшению скорости роста возмущений. Если длина волны очень мала, то в случае идеальной жидкости будут происходить гармонические колебания, частота которых пропорциональна волновому числу в степени  $3/2$ . Наличие вязкости приводит к быстрому затуханию высокочастотных колебаний. В случае растягивающейся струи возмущения с малой длиной волны по истечении некоторого промежутка времени оказываются быстро растущими. Рост именно таких возмущений может привести к распаду струи на капли. По этой причине необходимо изучить вопрос о том, насколько быстро будет затухать амплитуда таких возмущений в начальный период времени. Эта задача решается при помощи асимптотических методов. В рассматриваемом случае уравнения движения жидкости в струе и граничные условия, записанные в безразмерной форме, содержат уже два безразмерных параметра – числа Рейнольдса и Вебера, которые определяются при помощи равенств:

$$Re = \frac{\rho a_0^2}{\mu t_0^2}, We = \frac{\rho a_0^3}{\sigma t_0^2}.$$

Асимптотическая формула, описывающая поведение амплитуды возмущения радиуса растягивающейся струи при больших начальных значениях волнового числа  $k_0$ , имеет следующий вид:

$$\delta = \tau^{1/2} \exp \left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{2k_0^2}{\tau} + 2k_0 \tau^{1/2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \right] [A \cos \alpha(t) + B \sin \alpha(t)].$$

Здесь  $A$  и  $B$  – постоянные интегрирования, а величина  $\alpha(t)$  вычисляется по формуле:

$$\alpha(t) = \frac{1}{We^{1/2}} \left( \frac{2k_0^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \frac{k_0^{1/2}\tau}{4} + \frac{19\tau^{5/2}}{80k_0^{1/2}} \right).$$

Наличие вязкости приводит к затуханию амплитуды колебаний. Затухание происходит тем быстрее, чем меньше значение числа  $Re$ . Однако это затухание происходит медленнее, чем затухание возмущений с такой же длиной волны в случае струи постоянного радиуса. При увеличении числа  $We$  уменьшается частота колебаний. При уменьшении начального значения волнового числа скорость затухания возмущений уменьшается.

На заключительном этапе развития возмущения поверхности растягивающейся струи длина волны любого возмущения становится большой по сравнению с текущим значением радиуса струи. Это означает, что приближенные одномерные уравнения становятся пригодными для возмущения с любой начальной длиной волны. Таким путем построена длинноволновая асимптотика решения. Обыкновенное дифференциальное уравнение для амплитуды возмущения радиуса струи будет иметь следующий вид:

$$\left(1 + \frac{k^2}{8\tau}\right) \delta_{tt} + \left(\frac{2}{\tau} + \frac{3k^2}{Re}\right) \delta_t + \left[\frac{3k^2}{8\tau^3} - \frac{3k^2}{Re\tau} \left(1 - \frac{k^2}{8\tau}\right) - \frac{k^2\tau^{1/2}}{2We} \left(1 - \frac{k^2}{\tau}\right)\right] \delta = 0.$$

Вид решения определяется значениями трех параметров: чисел Вебера и Рейнольдса и начального значения волнового числа. Влияние сил вязкости на развитие возмущений проявляется по-разному в зависимости от величины числа Вебера. Если число Вебера мало, т.е. силы поверхностного натяжения играют значительную роль, наблюдается следующая картина. При относительно больших начальных значениях волнового числа в начальный период времени решение имеет колебательный характер. С течением времени текущее значение длины волны возмущения увеличивается, т.е. текущее значение волнового числа уменьшается (обратно пропорционально  $\tau$ ). Одновременно пропорционально  $\tau^{-1/2}$  уменьшается текущее значение радиуса струи. Поэтому по истечении некоторого промежутка времени течение жидкости в струе теряет устойчивость и амплитуда возмущения радиуса струи начинает быстро увеличиваться. Влияние вязкости проявляется в том, что в начальный период времени при уменьшении числа Рейнольдса амплитуда колебаний уменьшается с течением времени. Одновременно при уменьшении числа Рейнольдса момент времени, когда начинается монотонный рост амплитуды возмущения, наступает позже.

При малых значениях числа Вебера и относительно малых значениях волнового числа рост амплитуды возмущения радиуса струи начинается сразу. Здесь также влияние вязкости проявляется в том, что развитие возмущений при уменьшении числа Рейнольдса происходит медленнее. Однако при увеличении числа Вебера картина изменяется. Первоначально амплитуда возмущения радиуса струи оказывается большей у тех возмущений, которые характеризуются меньшими значениями числа Рейнольдса. С течением времени амплитуда тех возмущений, для которых число Рейнольдса больше, начинает возрастать быстрее и их амплитуда становится больше, чем у возмущений, характеризуемых малыми числами Рейнольдса. Дальнейшее увеличение числа Вебера приводит к тому, что амплитуда возмущений во все моменты времени оказывается большей у тех из них, которые характеризуются меньшими значениями числа Рейнольдса. Таким образом, при сравнительно малых значениях числа Вебера наличие вязкости оказывает стабилизирующее влияние на развитие возмущений. Однако при увеличении числа Вебера наличие вязких напряжений в удлиняющейся струе приводит к ее неустойчивости.

Нелинейное развитие возмущений в струе жидкости постоянного диаметра изучается довольно давно. Как уже говорилось выше, один из методов решения этой проблемы представляет собой метод возмущения по малому параметру – амплитуде возмущения. Такая задача полностью решена с точностью до членов третьего порядка для струй идеальной жидкости. Для струй вязкой жидкости точное решение построено быть не может. Приближенное решение задачи получено на основе приближенных одномерных уравнений. Это решение позволяет выяснить каково влияние волнового числа, числа

Рейнольдса и начального значения амплитуды возмущения на форму струи перед ее распадом на капли. Наиболее заметно вязкость жидкости сказывается на величине промежутка времени от момента возникновения возмущения до момента распада струи жидкости на капли. Для нахождения этой величины поступим следующим образом. При фиксированных значениях волнового числа, числа Рейнольдса и начального значения амплитуды возмущения будем вычислять координаты точек поверхности струи жидкости в различные моменты времени. Тот момент времени, в который радиальная координата одной из точек поверхности обратится в нуль, и будем считать искомым. При фиксированном значении числа Рейнольдса с увеличением волнового числа время до распада струи на капли сперва убывает, достигает минимума, и затем увеличивается. Как и следовало ожидать, влияние числа  $Re$  тем сильнее, чем больше значение волнового числа. Это связано с тем, что в случае коротковолновых возмущений производные скорости жидкости по координатам принимают большие значения, и вязкость жидкости сказывается на течении сильнее. Положение минимума на графике зависимости времени до распада струи от волнового числа при увеличении  $Re$  смещается в сторону меньших значений волнового числа. В широком диапазоне значений числа Рейнольдса зависимость времени до распада от числа  $Re$  слабая. Лишь при сравнительно малых значениях числа  $Re$  время до распада очень сильно увеличивается. В этом случае течение, хотя и является неустойчивым, развитие неустойчивости происходит очень медленно.

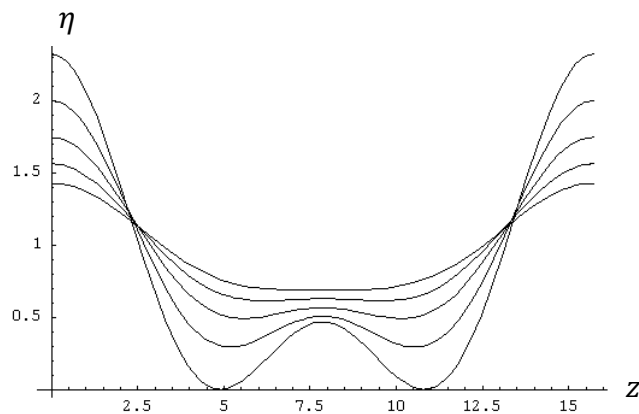


Рис.7. Форма струи при  $Re = 10$  и  $k = 0.4$  в различные моменты времени. Кривые построены при  $t = 18, 19, 20, 21$  и  $21.9305$

Форма струи жидкости в моменты времени, близкие к моменту распада на капли, существенно зависит от значения волнового числа. Для длинноволновых возмущений на графике зависимости радиуса струи от продольной координаты в некоторый момент времени появляется второй максимум (рисунок 7). Для коротковолновых возмущений такое явление не наблюдается. Образование второго максимума указывает на появление в промежутках между крупными основными каплями капель сателлитов. При возрастании числа  $Re$  величина второго максимума на графике зависимости радиуса струи от продольной координаты в момент распада струи уменьшается, а точка, в которой радиус струи обращается в нуль смещается по направлению к середине отрезка между двумя главными максимумами. При некотором значении числа  $Re$  второй максимум пропадает вовсе. Это означает, что при увеличении числа  $Re$  размер капель сателлитов уменьшается, а при некотором  $Re$  неоднородный распад струи прекращается. Вязкость жидкости подавляет развитие второй гармоники, и капли сателлиты не образуются. При увеличении волнового числа точка, в которой обращается в нуль радиус струи в момент распада струи на капли, смещается по направлению к центру, а радиус струи в середине отрезка между двумя основными максимумами уменьшается. Следовательно, размер капель сателлитов уменьшается при уменьшении длины волны возмущения.

**В заключении** сформулированы основные научные результаты, полученные в диссертационной работе. Эти результаты заключаются в следующем.

1. Разработана методология приближенного аналитического описания гидродинамики ламинарного движения жидкостей в трубах и каналах с проницаемыми стенками. В рамках этой методологии построено приближенное аналитическое решение задачи расчета поля скорости и давления в трубе с проницаемыми стенками, причем на стенке выполняется условие проскальзывания жидкости. Для той ситуации, когда скорость протекания через стенку определяется перепадом давлений на стеке, а давление снаружи трубы можно считать постоянным, получена формула, позволяющая определить расход жидкости, протекающей через боковую поверхность трубы. Построено решение задачи о нестационарном движении жидкости в канале с проницаемыми стенками при изменении расхода жидкости на входе в трубы по периодическому закону.
2. Построены формулы для расчета полностью развитого процесса теплоотдачи в трубе, на стенках которой наблюдается проскальзывание жидкости. Формулы построены для двух наиболее важных случаев: фиксированный тепловой поток на стенке трубы и фиксированная температура стенки. Построено приближенное аналитическое решение задачи о тепло- или массообмене потока со стенками трубы или канала, когда изменение температуры или концентрации примеси сосредоточено в пределах тонкого температурного или концентрационного пограничного слоя, а на стенках трубы или канала температура (концентрация) изменяется по степенному закону.
3. На основе использования данных прямого численного моделирования турбулентных течений в трубах и каналах, а также экспериментальных данных, полученных в последние годы, построены формулы для расчета коэффициента трения в плоском канале и трубе кругового поперечного сечения, которые лучше согласуются с результатами экспериментов и расчетов, чем другие подобные формулы. Построены формулы для расчета других интегральных характеристик течения. Получены формулы, описывающие влияние числа Рейнольдса на закономерности изменения напряжений Рейнольдса в вязком подслое и логарифмическом пограничном слое. Построены формулы, которые позволяют производить расчет профиля скорости в турбулентном ядре потока при различных значениях критерия Рейнольдса.
4. Для процесса теплообмена между турбулентным потоком жидкости и стенками канала построены формулы, которые позволяют определить профиль температуры в турбулентном ядре потока при различных значениях критериев Рейнольдса и Прандтля. Показано, что ни логарифмический, ни степенной закон для профиля температуры строго говоря не выполняется.
5. Показано, что вблизи стенки канала наблюдается сильная анизотропия распределения различных проекций пульсационной составляющей вихря скорости. В турбулентном ядре потока все три проекции примерно одинаковы. Получены формулы, позволяющие рассчитывать профиль энтропии при различных значениях критерия Рейнольдса. Этот результат особенно важен, поскольку в безразмерных переменных (переменных стенки) в ядре потока энтропия практически не отличается от диссипации энергии турбулентных пульсаций. Исследовано влияние числа Рейнольдса на закономерности изменения кинетической энергии турбулентных пульсаций по сечению канала как в области, примыкающей к стенке, так и в турбулентном ядре потока.
6. Разработана физически обоснованная модель для расчета поля скорости жидкости в гидроциклоне. На этой основе предложена методика расчета процесса классификации суспензий в гидроциклонах.

7. Разработана и сопоставлена с экспериментом модель барботажного перемешивания жидкости в аппарате кольцевого поперечного сечения.
8. Предложена приближенная теория, описывающая истечение жидкости через сопло. Для расчета формы струи изучена релаксация профиля скорости за срезом сопла. Эта теория согласуется с данными экспериментов.
9. Разработана теория капиллярной неустойчивости растягивающейся цилиндрической струи. Показано, что в этом случае возмущение с любой длиной волны становится неустойчивым. Разработана теория эволюции длинноволновых и коротковолновых возмущений.
10. Разработана теория нелинейного развития возмущений в струе вязкой жидкости.

**Публикации, в которых изложены основные научные результаты диссертации:**

**В рецензируемых изданиях**

1. Марцулевич Н.А. Гидродинамика мембранных аппаратов с полыми волокнами/Н.А. Марцулевич, В.Н. Гомолицкий, Ю.Г. Чесноков, Н.Н. Смирнов // Журн. прикл. химии. – 1989. – Т.62. – №3. – С.578-580.
2. Чесноков Ю.Г., Марцулевич Н.А. Ламинарное движение жидкостей в мембранных волокнах//Журн. приклад. химии. – 1989. – Т.62. – №9. – С.1954-1961.
3. Марцулевич Н.А., Чесноков Ю.Г. Моделирование процесса ультрафильтрации в мембранных каналах круглого сечения при гелеобразовании // Журн. прикл. химии. – 1989. – Т.62. – №9. – С.1950-1954.
4. Смирнов Н.Н. Гидродинамика и массоперенос с гелеобразованием в тонком спиральном канале мембранного аппарата /Н.Н. Смирнов, В.А. Константинов, Ю.Г. Чесноков, В.Н. Гомолицкий // Журн. прикл. химии. – 1989. – Т.66. – №8. – С. 1727-1733.
5. Чесноков Ю.Г., Марцулевич Н.А., Чжань Ван. Пульсационное движение в плоском канале с проницаемыми стенками // Журн. прикл. химии. – 1993. – Т.66. – №12. – С.2744-2751.
6. Чесноков Ю.Г. Изменение характеристик пульсационного течения жидкости по длине канала с проницаемыми стенками // Журн. прикл. химии. – 1994. – Т.67 – №3 – С.423-432.
7. Чесноков Ю.Г. Сила сопротивления, действующая на сферический пузырек и сферическую каплю // Журн. прикл. химии. – 1993. – Т.66. – №8. – С.1722-1726.
8. Китаецев Д.Н., Чесноков Ю.Г., Протодряконов И.О. Исследование течения реологически сложной жидкости в тонких каналах с проницаемыми стенками в процессах ультра- и микрофильтрации // Журн. прикл. химии. – 1994. – Т.67. - №3. – С.428-432.
9. Китаецев Д.Н., Протодряконов И.О., Чесноков Ю.Г. Исследование стационарного режима ультрафильтрации с образованием гелеобразного осадка///Журн. приклад. химии. – 1995. – Т.68. - №4. – С.658-662.
10. Чесноков Ю.Г. Тепло- или массообмен на начальном участке канала при переменной температуре стенки или концентрации на стенке // Журн. прикл. химии. – 1997. – Т.70. – №.1 – С115-122.
11. Чесноков Ю.Г. Тепло- или массообмен на начальном участке круглой трубы при переменной температуре стенки или концентрации на стенке // Журн. прикл. химии. – 1997. – Т.70. – №.1 – С.123-126.
12. Chesnokov Yu.G., Rasumovskij N.A. Free surface of high speed capillary jet //Applied Scientific Research. – 1998. – V.59. – N1. – P.77-88.

13. Разумовский Н.А., Чесноков Ю.Г. Капиллярные волны на поверхности растягивающейся цилиндрической струи жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1999. - №6. – С.97-104.
14. Чесноков Ю.Г. Капиллярный распад струи идеальной жидкости на капли в результате роста длинноволновых возмущений// Журн. прикл. химии. – 2000. – Т.73. – №3. – С.448-432.
15. Чесноков Ю.Г. Нелинейное развитие капиллярных волн в струе вязкой жидкости// Журнал технической физики. – 2000. – Т.70. – №8. – С.31-38.
16. Чесноков Ю.Г. Короткие капиллярные волны на поверхности растягивающейся цилиндрической струи вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т.42. – №3. – С.56-62.
17. Чесноков Ю.Г. Расчет процесса капиллярного дробления струи жидкости на капли по линейной теории // Журн. прикл. химии. – 2001. – Т.74. – №6. – С.954-958.
18. Чесноков Ю.Г. Механизм дробления деформирующихся капель вязкой жидкости в распылительном аппарате // Журн. прикл. химии. – 2001. – Т.74. – №12. – С.2001-2005.
19. Чесноков Ю.Г., Бауман А.В., Флисюк О.М. Расчет поля скоростей жидкости в гидроциклоне // Журн. прикл. химии. – 2006. – Т.79. – №5. - С.783-786.
20. Чесноков Ю.Г. Расчет некоторых характеристик течения жидкости или газа в круглой трубе//ЖПХ. – 2010. – Т.83. – №9. – С.1493-1498.
21. Чесноков Ю.Г. Влияние числа Рейнольдса на закономерности турбулентного течения жидкости в плоском канале // Журнал технической физики. – 2010. – Т.80. – №12. – С.33-39.
22. Чесноков Ю.Г. Отклонения от закона дефекта скорости, наблюдаемые при малых значениях числа Рейнольдса // Журнал технической физики. – 2011. – Т.81. – №7. – С.30-34.
23. Чесноков Ю.Г. Отклонения от закона дефекта температуры // Журн. прикл. химии. – 2013. – Т.86. – №2. – С.239-245.
24. Флисюк О.М., Чесноков Ю.Г., Круковский О.Н., Борисова Е.И. Математическая модель процесса барботажного перемешивания жидкости в аппарате кольцевого сечения // Журн. прикл. химии. – 2015. – Т.88. – №11. – С.1643-1647.
25. Чесноков Ю.Г. Зависимость от критерия Рейнольдса интегральных характеристик течения в плоском канале // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). – 2016. – №. 36. – С. 104-107.
26. Чесноков Ю. Г. О законе стенки для температуры // Теоретические основы химической технологии. – 2017. – Т. 51. – №. 2. – С. 230-234.
27. Чесноков Ю. Г. Новые формулы для расчета характеристик течения жидкости или газа в трубе кругового поперечного сечения // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90. – №. 4. – С. 1005-1011.
28. Чесноков Ю. Г. Влияние числа Рейнольдса на распределение пульсационной составляющей вихря скорости по сечению плоского канала // Журнал технической физики. – 2019. – Т.89. – №3. – С.347-352.
29. Чесноков Ю. Г. Влияние числа Рейнольдса на распределение кинетической энергии турбулентных пульсаций по сечению плоского канала // Журнал технической физики. – 2019. – Т.89. – №6. – С.844-849.
30. Чесноков Ю.Г. Влияние числа Рейнольдса на некоторые статистические характеристики пристенных турбулентных течений // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). – 2018. – №. 42. – С. 68-72.

31. Чесноков Ю.Г. Течение жидкостей по трубкам с проницаемыми стенками при наличии проскальзывания на стенке. // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). – 2018. – №. 47. – С. 102-107.
32. Чесноков Ю.Г. Теплоотдача в плоском канале при  $Pr = 0.71$  по данным прямого численного моделирования // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). – 2019. – №. 51. – С. 97-101.
33. Чесноков Ю.Г. Теплообмен в плоском канале при турбулентном режиме течения в случае малых значений числа Прандтля по данным прямого численного моделирования // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). – 2021. – №. 56. – С. 57-60

### **Прочие публикации**

34. Чесноков Ю.Г., Бауман В.А., Флисюк О.М. Математическая модель поля скоростей жидкости в гидроциклоне. В кн.: Математические методы в технике и технологиях – МММТ-16: Сб. трудов XVI международ. научн. конф. В 10-и т. Т.10. Секция 11 – С.-Петербург. – 2003. – С.107-108.
35. Бауман В.А., Чесноков Ю.Г. Методика технологического расчета процесса гидроциклонирования суспензии гидроксида алюминия. В кн.: Сборник докладов XI международной конференции «Алюминий Сибири». – Красноярск. 2005. – С. 205-211.
36. Флисюк О.М. Изучение перемешивания жидкости в кольцевом зазоре емкости /О.М Флисюк, О.Н. Круковский, Ю.Г. Чесноков, Е.И. Борисова, М.В. Шипоров, Е.В. Виноградова. В кн.: Материалы научной конференции, посвященной 186-й годовщине образования СПбГТИ(ТУ). – С.-Петербург. – 2014. – С.264.
37. Чесноков Ю.Г. Гидродинамика мембранных аппаратов с полыми волокнами при наличии проскальзывания на стенке. В кн.: Приоритетные направления развития науки и технологий. Доклады XXIV международной научно-практической конференции. – Тула. – 2018. – С.80-82.
38. Чесноков Ю.Г. Теплообмен в трубе кругового поперечного сечения на установившемся участке при наличии проскальзывания на стенке. В кн.: Экспериментальные и теоретические исследования в современной науке: проблемы, пути решения. Материалы конференции. Часть 3. – Ростов-на-Дону. – 2018. – С.284-286.
39. Чесноков Ю.Г. Влияние числа Рейнольдса на среднеквадратичные значения проекций пульсационной составляющей скорости для течения в плоском канале. В кн.: Актуальные вопросы естественных и математических наук в современных условиях развития страны. Выпуск VI. Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции (11 января 2019 г.) – Санкт-Петербург. – 2019. – С.16-18.
40. Ю.Г. Чесноков. Влияние числа Рейнольдса на закономерности турбулентных течений вблизи твердых поверхностей / Ю.Г. Чесноков // Энергоресурсоэффективные экологически безопасные технологии и оборудование. Сборник научных трудов международного научно-технического симпозиума «Вторые международные Косыгинские чтения, приуроченные к 100-летию РГУ имени А.Н. Косыгина»: Т.1 – М.: ФГБОУВО «РГУ им. А.Н. Косыгина». – 2019. – С.146-148.